МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет
вычислительной математики
и кибернетики

**ПРАКТИЧЕСКИЕ
ЗАНЯТИЯ
ПО ФИЗИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-
МАТЕМАТИКОВ**

ЧАСТЬ IV

В.П. Кандидов, А.Ю. Чикишев

ФИЗИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

МОСКВА

2007

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО ФИЗИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ-МАТЕМАТИКОВ

Под редакцией профессора В.А. Макарова

ЧАСТЬ IV

В.П. Кандидов, А.Ю. Чикишев

ФИЗИКА ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

**МОСКВА
2007**

Оглавление

Предисловие редактора

Настоящий том является четвертым в серии из пяти томов, составленных на основе более чем тридцатилетнего опыта преподавания физики студентам факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ им. М.В. Ломоносова. Первый том («Механика») и третий том («Электричество и магнетизм») вышли в 2006 году.

На примере электромагнитных и звуковых волн курс знакомит с основными закономерностями волновых явлений. В начале каждого раздела дается краткое изложение теории в объеме, необходимом для решения задач, далее приводится решение и анализ нескольких типовых примеров, затем формулируются задания для самостоятельной работы. При составлении сборника авторы стремились к тому, чтобы примеры и задачи не только закрепляли теоретические знания в области волновых явлений, но и способствовали формированию у студентов неразрывной связи между учебным материалом и реальными волновыми процессами окружающего мира. Поэтому во многих случаях предлагается рассмотреть природные явления или провести физический анализ конкретных устройств современной науки и техники, выполнить расчеты в размерных единицах.

В сборник включено более 150 задач и примеров. Часть из них позаимствована из известных учебных пособий. Они могут быть использованы при проведении традиционных семинарских занятий. Однако для решения значительной части оригинальных заданий, составленных авторами, необходима указанная справочная и дополнительная литература, консультации преподавателя. Эти задания предназначены для углубленной самостоятельной работы студента. Результаты их выполнения целесообразно представлять в виде небольшого научного отчета. У номера каждого задания в скобках указана ее степень трудности, которая оценивается в баллах от 1 (наименьшая трудность) до 3 (наивысшая трудность).

Задачи первого параграфа "Бегущие волны" призваны помочь в усвоении основных понятий волнового процесса и закрепить знания о кинетических и энергетических характеристиках бегущей волны. Во втором параграфе "Волны на границе раздела" рассмотрены закономерности отражения и прохождения волн на границе раздела двух сред, в частности, полное внутреннее отражение волн и его проявление в природе. В третьем параграфе анализируются возможные состояния поляризации электромагнитных волн. Параграф "Спектры" посвящен спектральному аппарату в анализе волновых пакетов и сигналов. Основное внимание здесь уделяется демонстрации на конкретных примерах основных соотношений между параметрами сигнала и его спектра, в частности, анализу связи длительности и формы сигнала с шириной спектра. В отдельном параграфе "Спектральный анализ на компьютере" собраны задания, призванные познакомить с особенностями дискретного преобразования Фурье, которое используется при компьютерных вычислениях. Здесь основное внимание уделено физической интерпретации результатов спектрального анализа. В шестом параграфе "Дисперсия" рассматриваются примеры распространения волн в распределенных колебательных системах, волноводах, оптических волокнах. Ряд задач посвящен анализу влияния дисперсии на скорость передачи информации в волноводах и оптических линиях связи. Задачи параграфа "Интерференция. Когерентность" должны закрепить основные представления о явлении интерференции и познакомить с понятием когерентности на классических и хорошо известных примерах. В восьмом параграфе "Многолучевая интерференция. Радиотелескопы" собраны задания, раскрывающие особенности интерференции многих волн на классических примерах и демонстрирующие ее применение для расчета диаграмм направленности астрофизических антенн и систем сотовой связи. Девятый параграф "Дифракция" содержит как классические задачи, так и задания по Фурье-оптике. В конце пособия приведены основные справочные данные, которые могут понадобиться при выполнении заданий.

Руководство факультета ВМК уделяет большое внимание преподаванию специальных разделов физики, необходимых выпускникам факультета ВМК в их дальнейшей работе. Неоценимую помощь в отборе материала, формировании уровня требований и методики преподавания оказали советы акад. РАН Е.И. Моисеева, чл.-корр. РАН Д.П. Костомарова, профессоров А.М. Денисова и М.М. Хапаева, доцентов Б.И. Березина и В.Г. Сушко. От лица авторов пособия выражаю также благодарность всем преподавателям и научным сотрудникам кафедры Общей физики и волновых процессов, ведущим занятия на факультете ВМК и способствовавшим становлению этого курса. Глубоко признателен профессорам А.М. Салецкому и С.М. Аракеляну, взявшим на себя труд по рецензированию рукописи, и О.Г. Косаревой за помощь при подготовке материалов сборника.

В.А. Макаров

§1. Бегущие волны

Краткие теоретические сведения

Волновые процессы имеют общие закономерности независимо от их физической природы и механизма возникновения. Звук это волна сжатия и растяжения упругой среды. Звуковая волна образуется вследствие коллективного движения ее частиц. Электромагнитная волна это взаимосвязанные электрическое и магнитное поля, которые меняются в пространстве и времени. Волны возникают в массовых потоках – на автомагистралях и конвейерах, в трубопроводах и системах массового обслуживания. Волновой характер носит процесс установления концентрации вещества при химических реакциях, плотности особей в популяциях. Волны распространяются по нервным клеткам, обеспечивая жизнедеятельность живых организмов.

Волну можно определить как любое различимое возмущение или сигнал, распространяющиеся в пространстве. Возмущение это отклонение измеряемой величины от равновесного значения, например, смещения, скорости частиц, или давления в звуковой волне, напряженности электрического и магнитного поля в электромагнитной волне, концентрации субстанций в массовых потоках, химических реакциях.

Поскольку возмущение $\xi(\mathbf{r},t)$ в волне меняется в пространстве и времени, волновой процесс описывается уравнением в частных производных. При малых возмущениях, когда свойства среды не меняются под воздействием волны, волновое уравнение является линейным:

$$\frac{\partial^2\xi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - c^2\Delta\xi(\mathbf{r},t) = 0\,, \tag{1.1}$$

где c – фазовая скорость волны. В одномерном случае волна бежит вдоль одной пространственной координаты и волновое уравнение для возмущения $\xi(x,t)$ принимает вид:

$$\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2\xi(x,t)}{\partial x^2} = 0\,. \tag{1.2}$$

В гармонической волне возмущение выражается зависимостью, которое для волны, бегущей по оси OX может быть записано следующим образом:

$$\xi(x,t) = a_0\cos(\omega t - kx + \varphi_0) \tag{1.3}$$

или в комплексной форме

$$\xi(x,t) = \mathrm{Re}\{a_0 e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}\}\ . \tag{1.4}$$

Здесь a_0 – амплитуда возмущения в волне, φ_0 – начальная фаза возмущений, символ Re означает реальную часть от выражения в фигурных скобках. Круговая частота ω связана с периодом T колебаний во времени соотношением:

$$\omega = 2\pi / T\ . \tag{1.5}$$

Кроме ω определяют также частоту волны ν, равную

$$\nu = 1/T = \omega / 2\pi\ . \tag{1.6}$$

Волновое число k выражается через длину волны λ:

$$k = 2\pi / \lambda\ . \tag{1.7}$$

Длина волны λ равна:

$$\lambda = cT\ . \tag{1.8}$$

Из (1.5), (1.7) и (1.8) следуют соотношения:

$$k = \omega / c \quad \text{и} \quad \lambda = c / \nu\ . \tag{1.9}$$

Выражения (1.3) и (1.4) описывают прямую волну, то есть бегущую в положительном направлении по оси *OX*. Для обратной волны, которая распространяется в обратном направлении по оси *OX*, возмущение $\xi(x,t)$ описывается выражением:

$$\xi(x,t) = \mathrm{Re}\{a_0 e^{i(\omega t + kx + \varphi_0)}\}\ . \tag{1.10}$$

Аргументом гармонических функций (1.3), (1.4) и (1.10) является текущая фаза волны $\varphi(x,t)$, которая меняется в пространстве и времени. Поверхность равных значений фазы в некоторый момент времени $t = t^*$ является волновым фронтом. Волны вида (1.3), (1.4), (1.10) называются плоскими, так как их волновой фронт является плоскостью, перпендикулярной оси *OX*.

Волна, расходящаяся от точечного источника, является сферической, ее волновой фронт имеет вид сферы. Амплитуда возмущения в сферической волне $\xi(r,t)$ обратно пропорциональна расстоянию в соответствии с выражением:

$$\xi(r,t) = \frac{a_0}{r} e^{i(\omega t - \mathbf{kr} + \varphi_0)}, \tag{1.11}$$

где r – радиальная координата в сферической системе координат.

Для расходящейся волны с цилиндрическим волновым фронтом, создаваемой источником в виде тонкой нити, справедливо:

$$\xi(r,t) = \frac{a_0}{\sqrt{\rho}} e^{i(\omega t - \mathbf{k\rho} + \varphi_0)}, \qquad (1.12)$$

где $\boldsymbol{\rho}$ – радиус вектор в полярной системе координат.

Волновой вектор $\mathbf{k}$ перпендикулярен волновому фронту и по величине совпадает с волновым числом.

Закон сохранения энергии в волне записывается следующим образом в дифференциальной форме

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (div\mathbf{S}) = 0, \qquad (1.13)$$

и в интегральной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} w d\omega + \oint_{\Sigma} \mathbf{S} d\mathbf{\Sigma} = 0, \qquad (1.14)$$

где w – объемная плотность энергии в волне, $\mathbf{S}$ – вектор плотности потока энергии переносимой волной, Ω и Σ – объем и замкнутая поверхность его ограничивающая, соответственно.

В изотропных средах вектора $\mathbf{S}$ и $\mathbf{k}$ сонаправлены. Плотность энергии w и величина плотности потока энергии $\mathbf{S}$ в бегущей волне связаны соотношением:

$$S = cw. \qquad (1.15)$$

Параметры волны имеют следующие размерности:

$[t]$ = с, $[\nu]$ = Гц, $[\omega]$ = рад/с, $[\lambda]$ = м, $[k]$ = м$^{-1}$, $[c]$ = м/с, $[w]$ = Дж/м^3, $[S]$ = Вт/м^2.

Звуковая волна

В звуковой волне возмущения плотности ρ' и давления p' в среде связаны простым соотношением $p = c_0^2\rho$ и подчиняются уравнению, получаемому в приближении линейной акустики:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - c_0^2\Delta\rho = 0. \qquad (1.16)$$

Скорость звука c_0 в среде определяется ее сжимаемостью β и равновесной плотностью ρ_0:

$$c_0^2 = \frac{1}{\rho_0\beta}. \qquad (1.17)$$

Процессы сжатия и растяжения в звуковой волне являются быстрыми по сравнению с теплопередачей, и их можно считать адиабатическими. В результате скорость звука в газах равна:

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0}, \qquad (1.18)$$

где p_0 – давление в равновесном состоянии, а γ – показатель адиабаты.
В воздухе показатель адиабаты $\gamma \approx 1{,}4$ и при нормальных атмосферных условиях ($p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па; $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3) скорость звука $c_0 \approx 330$ м/с.

Акустический импеданс среды $Z_{ак}$, характеризующий ее волновое сопротивление для волны сжатия–растяжения, определяется выражением:

$$Z_{ак} = \rho_0 c_0 . \qquad (1.19)$$

Скорость движения частиц V и возмущение давления p в звуковой волне связаны соотношением, которое следует из линеаризованного уравнения движения упругой среды:

$$p = Z_{ак} V . \qquad (1.20)$$

Объемная плотность энергии w и вектор плотности потока энергии **S** выражаются следующим образом:

$$w = \frac{1}{2}\rho_0 v^2 + \frac{1}{2}\beta p^2 \qquad (1.21)$$

$$\mathbf{S} = p\mathbf{V} \qquad (1.22)$$

Для плотности энергии w и величины плотности потока энергии S имеют место формулы:

$$w = \rho_0 V^2 ; \quad w = \beta p^2 ; \quad S = \rho_0 c_0 V^2 ; \quad S = \frac{p^2}{\rho_0 c_0} . \qquad (1.23)$$

Из приведенных формул следует соотношение (1.15) для объемной плотности энергии w и плотности потока энергии S в звуковой волне:

$$S = cw \qquad (1.24)$$

Интенсивность звука I, определяемая как средняя за период плотность потока энергии, равна

$$I = \frac{Z_{ак}}{2} V_{max}^2 \quad \text{или} \quad I = \frac{1}{2Z_{ак}} p_{max}^2 , \qquad (1.25)$$

где p_{max} и V_{max} – амплитуда колебаний давления и скорости частиц в упругой среде.

Полоса звуковых частот, воспринимаемых человеком, простирается от 16 Гц до 20 кГц. Слух человека имеет наиболее высокую чувствительность на частотах $\nu = 2 - 3$ кГц. Порог слышимости, или наименьшая интенсивность звука этого частотного диапазона, которую способен воспринять человек, составляет $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м^2. Интенсивность звука измеряется также в децибелах (дБ) – логарифмической шкале относительного превышения порога слышимости I_0 и обозначается символом A:

$$A = 10\lg(I / I_0)\ . \tag{1.26}$$

Болевой порог для слуха человека наступает в указанном частотном диапазоне при интенсивности, равной $I_{бол} = 10^{14} I_0$, то есть при A = 140 дБ.

Параметры акустических сред и звуковой волны имеют следующие размерности: $[\rho]$ = кг/м^3; $[\beta]$ = м^2/н; $[Z_{ак}]$ = кг/(м^2·с) = Па·с/м, $[p]$ = н/м^2, $[V]$ = м/с.

Электромагнитная волна

Из системы уравнений Максвелла для идеального однородного изотропного диэлектрика в отсутствии свободных электрических зарядов следует волновое уравнение для напряженности электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей электромагнитной волны:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mathbf{E} = 0\,. \tag{1.27}$$

Скорость распространения электромагнитной волны c в системе единиц СИ выражается следующим образом:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}}\,, \tag{1.28}$$

где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ (А·с)/(В·м) – электрическая постоянная, $\mu_0 = 1{,}26 \cdot 10^{-6}$ (В·с)/(А·м) – магнитная постоянная, ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды. В вакууме, где $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$, скорость электромагнитной волны равна:

$$c_0 = 2{,}998 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \tag{1.29}$$

Показатель преломления среды n определяется как отношение скоростей c_0/c, поэтому

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}\,. \tag{1.30}$$

Волновое сопротивление или импеданс среды $Z_{эм}$ для электромагнитной волны выражается через ε и μ следующим образом:

$$Z_{эм} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}\,. \tag{1.31}$$

Импеданс вакуума равен $Z_0 = 377$ Ом.

Величины напряженностей электрического E и магнитного H полей связаны соотношением:

$$E = Z_{эм} H\,. \tag{1.32}$$

Напряженности полей направлены таким образом, что вектора $\mathbf{k}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ образуют правую тройку в электромагнитной волне, распространяющейся в свободном пространстве.

Видимая область электромагнитных волн лежит в оптическом диапазоне и простирается от длины волны $\lambda = 0{,}39$ мкм, соответствующей фиолетовому цвету, до $\lambda = 0{,}76$ мкм, соответствующей красному цвету. Наибольшую чувствительность человеческое зрение имеет в желто-зеленой области спектра с $\lambda \approx 0{,}55$ мкм.

Для прозрачных диэлектриков (стекло, кварц, полиэтилен, газы, воздух) в оптическом диапазоне магнитная проницаемость $\mu = 1$, поэтому $n = \sqrt{\varepsilon}$ и согласно (1.30) и (1.31) для показателя преломления n и импеданса $Z_{эм}$ среды следуют соотношения:

$$Z_{эм} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \frac{1}{n c_0 \varepsilon_0}\,. \tag{1.33}$$

Объемная плотность w и вектор плотности потока энергии $\mathbf{S}$ электромагнитной волны определяются выражениями:

$$w = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{\mu\mu_0}{2}H^2 \quad \text{или} \quad w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2\,, \; w = \mu\mu_0 H^2\,, \tag{1.34}$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]\,. \tag{1.35}$$

С учетом (1.30)–(1.33) для величины S имеют место формулы:

$$S = c\varepsilon\varepsilon_0 E^2 \quad \text{или} \quad S = c\mu\mu_0 H^2\,. \tag{1.36}$$

Из (1.34) и (1.36) следует соотношение между объемной плотностью энергии w и плотностью потока энергии $\mathbf{S}$ электромагнитной волны такое же, как и в случае звуковой волны:

$$S = cw. \tag{1.37}$$

Интенсивность электромагнитной волны I (средняя за период плотность потока энергии) обычно выражается через амплитуду напряженности электрического поля E_0:

$$I = \frac{1}{2Z_{\text{эм}}} E_0^2 \quad \text{или} \quad I = \frac{c_0 n \varepsilon_0}{2} E_0^2 . \tag{1.38}$$

Электромагнитная волна оказывает давление p при падении на поверхность среды. Это давление обусловлено силой Ампера, с которой магнитное поле волны действует на токи проводимости, возникающие в среде под действием электрического поля. Для полностью поглощающей среды давление p электромагнитной волны равно:

$$p = w \cdot \cos(\mathbf{e_k}, \mathbf{d\sigma}) , \tag{1.39}$$

где $\mathbf{e_k}$ – единичный вектор в направлении волнового вектора $\mathbf{k}$ падающей волны, а $\mathbf{d\sigma}$ – вектор нормали к поверхности. В случае нормального падения на поверхность среды с коэффициентом отражения R_I давление электромагнитной волны определяется выражением:

$$p = (1 + R_I) w , \tag{1.40}$$

где w – объемная плотность энергии в падающей волне.

Солнечная постоянная $S_{\text{С}}$ равна плотности потока энергии Солнечного излучения, которое падает на верхние слои Земной атмосферы:

$$S_{\text{С}} = 1{,}37 \text{ кВт/м}^2. \tag{1.41}$$

Около 36% этой мощности отражается в космос, вследствие рассеяния солнечного излучения облаками и молекулами газовых компонент атмосферы. Часть излучения поглощается атмосферой. В результате, на поверхность Земли поступает в среднем 46% от солнечного излучения, падающего на верхние слои атмосферы.

Диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости, а также показатель преломления n среды безразмерны. Напряженность электрического поля в системе единиц СИ имеет размерность $[E]$ = В/м, магнитного поля – $[H]$ = А/м, электрическая индукция $[D]$ = А·с/м^2, магнитная индукция $[B]$ = Тл (Тесла) = В·с/м^2.

Примеры решения задач

Пример 1.1. Излучатель гидроакустического локатора имеет осесимметричную вытянутую диаграмму направленности угловой ширины $\varphi = 15^{\circ}$. Пренебрегая затуханием в воде, определить на расстоянии $l = 3$ км следующие параметры ультразвуковой волны: интенсивность I (Вт/см^2), амплитуду для смещений частиц воды a, скорости V_{max}, ускорения $(\partial V/\partial t)_{max}$, и амплитуду колебаний давления p_{max}. Мощность излучателя $N = 30$ Вт, частота $f = 50$ кГц. В пределах угловой ширины диаграмму направленности считать равномерной.

Решение. Будем считать, что мощность акустической волны равномерно распределена по части сферической поверхности, выделяемой при сечении сферы радиуса l конусом с углом φ при вершине. Центр сферы и вершина конуса совпадают с излучателем, который считается точечным. Площадь, выделяемой таким образом части сферической поверхности, равна:

$$\Sigma = 2\pi l^2(1 - \cos(\varphi/2)).$$

Отсюда, искомая интенсивность волны равна

$$I = N/\Sigma = 6{,}2\cdot 10^{-5}\ \text{Вт/м}^2.$$

Согласно (1.25) для амплитудного значения скорости частиц в волне имеем:

$$V_{max} = \sqrt{\frac{2I}{Z_{ак}}},$$

где $Z_{ак} = \rho_0 c_0$ – акустический импеданс воды. Подставляя вычисленную интенсивность I, и взятые из справочника (см., например, *Х. Кухлинг, Справочник по физике, М.: Мир, 1982*) значения для плотности воды $\rho_0 = 10^3$ кг/м^3 и скорости звука в воде $c_0 \approx 1{,}5\cdot 10^3$ м/с, находим $V_{max} = 9{,}2\cdot 10^{-6}$ м/с.

Используя очевидные соотношения между абсолютными значениями амплитуд смещения a, скорости V_{max} и ускорения $(\partial V/\partial t)_{max}$:

$$V_{max} = 2\pi f a \quad \text{и} \quad (\partial V/\partial t)_{max} = 2\pi f\, V_{max},$$

получаем амплитудные значения: для смещения частиц $a = 2{,}9\cdot 10^{-11}$ м и для их ускорения $(\partial V/\partial t)_{max} = 2{,}9$ м/с^2.

Амплитуду колебаний давления найдем, используя соотношение (1.20):

$$p = Z_{ак}V = 13\ \text{Па}.$$

Пример 1.2. Рубиновый лазер излучает гигантский световой импульс с длиной волны 0,69 мкм. Положим, что импульс представляет собой цуг (конечный отрезок) линейно-поляризованной плоской волны с постоянной амплитудой. Длительность цуга τ = 0,1 с, энергия импульса W = 0,3 Дж, поперечное сечение пучка – круг с диметром D = 5 мм. Оценить объемную плотность энергии, переносимую импульсом (дифракционным расширением пучка пренебречь). Найти амплитуду электрического поля E. Найти давление на экран, перпендикулярный пучку, рассмотрев три случая: (а) экран полностью поглощает, (б) экран полностью отражает, (в) коэффициент отражения экрана R = 0,9.

Решение. Объемная плотность энергии w связана с величиной плотности потока энергии S соотношением (1.37): $w = S/c$. Величину вектора S можно определить, зная энергию импульса W, его длительность τ и площадь поперечного сечения пучка σ, которая равна $\sigma = \pi D^2/4$. Полагая, что импульс имеет прямоугольную форму, можно оценить объемную плотность энергии следующим образом:

$$w = \frac{4W}{\pi c\tau D^2} = 5{,}1\cdot 10^{-4}\ \text{Дж/м}^3.$$

Используя выражение (1.36) для плотности потока энергии $S = c\varepsilon_0 E_0{}^2$, вычисляем амплитуду напряженности электрического поля:

$$E_0 = \sqrt{\frac{S}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4W}{\pi c\varepsilon_0\tau D^2}} = 7{,}6\cdot 10^3\ \text{В/м}.$$

Давление световой волны определяется при помощи соотношений (1.40) $p = w(1+R_I)$, где R_I – коэффициент отражения поверхности, на которую падает световая волна. Таким образом, для случаев R = 0; 0,9 и 1 имеем $p = 5{,}1\cdot 10^{-4}$; $9{,}7\cdot 10^{-4}$ и $10{,}2\cdot 10^{-4}$ Па, соответственно.

Пример 1.3. Оценить мощность P, при которой пучок диаметром d = 1 мм вызывает электрический пробой газа. Длина волны лазерного излучения λ = 0,5 мкм. Принять потенциал ионизации газа U = 10 В. Для получения оценки рассмотреть движение электрона в поле световой волны.

Решение. Уравнение движения электрона в поле световой волны имеет вид:

$$m\frac{dV}{dt} = -eE_0\cos(\omega t),$$

где $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг и $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл – масса и заряд электрона, соответственно, ω – частота волны, V – скорость движения электрона. Отсюда, скорость электрона равна

$$V = \frac{eE_0 \sin(\omega t)}{m\omega}.$$

Максимальная кинетическая энергия электрона при его движении в поле световой волны будет

$$(W_{\text{кин}})_{\max} = \frac{mV^2}{2} = \frac{m}{2}\left(\frac{eE_0}{m\omega}\right)^2.$$

При ионизации вещества, сопровождающей электрический пробой, энергия электрона должна составлять eU. Таким образом, потребуем, чтобы $(W_{\text{кин}})_{\max} = eU$. В результате для напряженности электрического поля световой волны получаем

$$E_0{}^2 = \frac{2Um\omega^2}{e}.$$

Плотность потока электромагнитной энергии определяется по (1.36):

$$S = c\varepsilon_0 E_0{}^2.$$

Окончательно, для мощности лазерного излучения, вызывающего ионизацию вещества, получаем выражение:

$$P = S\frac{\pi d^2}{4} = \frac{c\varepsilon_0 \pi d^2 U m\omega^2}{2e}.$$

Подставляя численные значения, находим $P \approx 3{,}4 \cdot 10^{12}$ Вт.

Пример 1.4. Круговая частота плоской электромагнитной волны равна $\omega = 10^9$ рад/с, а амплитуда вектора индукции B магнитного поля равна 10^{-6} Тл. Найти длину волны в вакууме, амплитуду вектора электрической напряженности E, средний поток энергии $\langle S \rangle$, максимальное значение потока энергии $S_{\max}$.

Решение. Используя выражения (1.6) и (1.9), получаем $\lambda = 2\pi c/\omega \approx 1{,}88$ м. Заметим, что эта длина волны (частота) принадлежит диапазону телевизионного вещания. Применяя соотношение (1.32), а также используя связь между величинами B и H, получаем, что амплитуда вектора напряженности электрического поля равна $E = B \cdot c = 300$ В/м.

Максимальное и среднее за период значения плотности потока энергии найдем, используя формулы (1.36) и (1.38): $S_{max} = 2\langle S\rangle \approx 240$ Вт/м^2.

Пример 1.5. Тихий шепот имеет уровень интенсивности звуковой волны 30 дБ. Определить колебательную скорость частиц и смещение частиц в волне для частоты $f = 2{,}5$ кГц, попадающей в диапазон наибольшей чувствительности уха человека.
Решение. Из формулы (1.26) следует, что при силе звука 30 дБ интенсивность звуковой волны на три порядка превосходит значение порога слышимости, то есть интенсивность звуковой волны составляет $I = 10^{-9}$ Вт/м^2. Используя выражение (1.19), а также значения скорости звука в воздухе и плотности воздуха найдем акустический импеданс: $Z_{ак} \approx 430$ кг/(м^2·с). Теперь при помощи выражения (1.25) определим скорость частиц в волне: $V_{max} = \sqrt{\dfrac{2I}{Z_{ак}}} \approx 2{,}2\cdot10^{-6}$ м/с. Используя очевидное соотношение между амплитудами скорости и смещения частиц $V_{max} = 2\pi f a$, получаем, что амплитуда смещения частиц равна $a \approx 1{,}4\cdot10^{-10}$ м.

Задания для самостоятельной работы[1]

1.6. (*1*) Круглый поршневой излучатель звука с диаметром $D = 10$ см развивает мощность $N = 0{,}2$ Вт на частоте $f = 600$ Гц. Рассчитать интенсивность звука в децибелах; амплитуду смещения, скорости, ускорения частиц; амплитуду избыточного давления на расстоянии 2 см, рассматривая звуковую волну плоской, и на расстоянии 10 см, рассматривая волну как сферическую.
Вариант 1. Излучатель находится в воздухе.
Вариант 2. Излучатель погружен в воду.
Литература.
Е. Скучик. Основы акустики. М.: Мир, 1976, т. 1, с. 418.

1.7. (*1*) Используя определение и значение солнечной постоянной, оценить плотность потока энергии излучения на поверхности Солнца $I_С$, принимая его диаметр равным $1{,}4\cdot10^6$ км, а расстояние до Земли – $1{,}5\cdot10^8$ км.

[1] В скобках указана степень сложности задания, которая оценивается в баллах от 1 (наименьшая сложность) до 3 (наибольшая сложность).

Вычислить напряженность электрического поля солнечного излучения в верхних слоях атмосферы Земли $E_З$ и на поверхности Солнца $E_С$. Сравнить $S_С$, а также $E_З$ и $E_С$ с плотностью потока энергии $S_л$ и напряженностью поля $E_л$ лазерного излучения для импульсного рубинового лазера с параметрами: энергия 0,3 Дж, длительность импульса $\tau = 10^{-4}$ с, диаметр пучка d = 5 мм, λ = 693,5 нм.
Литература.
Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1979, § 4.4.

1.8. (*1*) На праздничной площади Вы попали в диаграмму направленности уличного громкоговорителя мощности N, находящегося на расстоянии l. Рассчитать интенсивность звуковой волны I (Вт/м^2), силу звука A (дБ), амплитуды колебаний скорости частиц V_{max}, смещения a, ускорения $(\partial V/\partial t)_{max}$, давления p_{max}, плотности воздуха ρ_{max} в точке Вашего местонахождения.
Вариант (а)
Громкоговоритель имеет равномерную диаграмму направленности в виде полусферы. Мощность N = 100 Вт, расстояние l = 100 м, частота f = 3 кГц.
Вариант (б)
Громкоговоритель имеет вытянутую осесимметричную диаграмму направленности угловой ширины 30^o, в пределах которой интенсивность излучения можно считать постоянной. Мощность N = 30 Вт, расстояние l = 200 м, частота f = 3 кГц.

1.9. (*2*) Падающий на атмосферу Земли солнечный свет обеспечивает плотность потока энергии, называемую Солнечной постоянной. Излучение, отраженное газами и облаками атмосферы, называемое альбедо Земли, составляет $A_З$ = 0,36 (Заметим, что альбедо Венеры $A_В$ = 0,75; Марса $A_М$ = 0,24). Поглощение солнечного излучения атмосферой составляет в среднем 18%. Чему равны среднеквадратичные значения напряженности электрического поля E и магнитной индукции B солнечного излучения, падающего на верхние слои атмосферы и на поверхность Земли? Каковы значения E и B солнечного излучения, падающего на атмосферу Венеры? Каково давление солнечного света на Землю и на Венеру?

1.10. (*1*) Лампа-вспышка мощностью 3 Вт дает пучок света квадратного сечения 10х10 см^2. Каковы плотность потока энергии S, напряженность электрического поля E, плотность энергии w, давление света p в непосредственной близости от лампы? Оценить эти параметры света на фотографируемых объектах, которые находятся на расстоянии 10 м и 100 м, полагая, что интенсивность света постоянна в полусфере с центром на лампе вспышке.

1.11. (*1*) Две плоские монохроматические волны с длинами λ_1 = 1,06 мкм и λ_2 = 1,09 мкм распространяются в среде без дисперсии в одном направлении. Амплитуды колебаний вектора E первой и второй волны равны 20 и 10 В/м, соответственно. Определить вектор плотности потока энергии в зависимости от времени и координаты.

Литература

Г.С. Ландсберг. Оптика. М.: Наука, 1976, гл. 23, § 135.

Л.Н. Капцов. Физика элементов ЭВМ, гл. 3, § 9,10.

1.12. (*1*) Плоская монохроматическая световая волна с длиной λ = 0,63 мкм падает нормально на две квадратные пластины с одинаковой площадью поверхности σ = 9 см^2. Плотность потока энергии $S = 10^7$ Вт/м^2. Пластины подвешены в вакууме на крутильных весах так, что расстояния от нити подвеса до ближних к нити краев пластин равны и составляют 4 см. Определить величину и направление момента сил, закручивающих нить, если первая пластина имеет коэффициент отражения R_1 = 0,1, а вторая R_2 = 1. Рассмотреть действие на пластины только давления света. Проанализировать, какие могли бы быть воздействия на освещаемую пластину, находящуюся в воздухе.

Литература.

Г.С. Ландсберг. Оптика. М.: Наука, 1976, гл. 34, § 185,186.

С.П.Стрелков. Механика. М.: Наука, 1975.

1.13. (*1*) Прямоугольная пластина подвешена в вакууме так, что может поворачиваться вокруг оси, проходящей через ее середину. Размер стороны пластины, параллельной оси, составляет 2 см. Полная длина ее стороны, перпендикулярной оси, – 20 см. Половина пластины слева от оси – зеркальная, справа – поглощающая. Пластина равномерно освещается светом, причем амплитуда колебаний вектора электрической напряженности световой волны равна E = 50 В/м. Найти величину и направление вращающего момента относительно указанной оси.

Литература.

Г.С. Ландсберг. Оптика. М.: Наука, 1976, гл. 34, § 185,186.

1.14. (*1*) Две плоские монохроматические волны с длинами $\lambda_1 = 1{,}06$ мкм и $\lambda_2 = 1{,}09$ мкм падают нормально на поверхность тела, отражающего 30% падающего на него излучения. Амплитуды колебаний векторов электрической напряженности одинаковы и составляют $E = 500$ В/м. Найти суммарное давления волн на тело в зависимости от времени.

Литература

Г.С. Ландсберг. Оптика. М.: Наука, 1976, гл. 34, § 185,186.

Л.Н. Капцов. Физика элементов ЭВМ, гл. 3, § 9,10.

1.15. (*1*) В воде распространяется звуковая волна с амплитудой давления $p_{\max} = 2 \cdot 10^{-5}$ Па (ее еще можно зарегистрировать). Какова амплитуда колебательной скорости, ускорения и смещения частиц в волне при $f = 10$ кГц? Определить интенсивность волны в Вт/м^2.

1.16. (*1*) Порог акустической кавитации на частоте 1 МГц в воде наступает при интенсивности звука 5 Вт/см^2. Какова прочность воды на разрыв (в Па) на этой частоте? Каковы амплитуды смещения и скорости частиц в волне при кавитации.

Литература

М.А. Исакович. Общая акустика. М.: Наука, 1973.

1.17. (*1*) Какова интенсивность волны в воде на частоте 1 кГц, если амплитуда смещения частиц составляет 10^{-4} см? Каковы колебательная скорость, ускорение и амплитуда давления?

1.18. (*1*) Сферический излучатель создает в акустической волне давление $p = 100$ Па на расстоянии 1 м. Рассчитать полную излучаемую акустическую мощность и интенсивность звука на расстоянии в 1 км, амплитуду давления, амплитуды колебательной скорости и смещения частиц в воде и в воздухе на различных частотах звукового диапазона.

1.19. (*1*) Сферический излучатель звука потребляет 500 Вт электрической мощности. Его КПД составляет 60%. Определить в воде на расстоянии 1 км амплитуды давления в акустической волне и колебательной скорости частиц, а также интенсивность волны. Оценить амплитуду смещения частиц на различных частотах звукового диапазона.

1.20. (*1*) На расстоянии $l = 100$ м сферическим излучателем необходимо создавать акустическое давление в 100 Па. Каков его минимальный размер, если порог акустической кавитации в воде составляет 5 Вт/см^2 ? Какова интенсивность волны и амплитуда колебательной скорости частиц на излучателе и в точке наблюдения?

1.21. (*1*) Определить мощность лазерного пучка N, необходимую для удержания в вакууме в поле силы тяжести частицы массой $m = 4\cdot 10^{-9}$ кг. Принять, что частица полностью отражает излучение.

1.22. (*2*) Согласно кинетической теории теплового движения любая частица (броуновское тело), находящееся в равновесии со средой, обладает кинетической энергией $W_T = 3/2\ kT$.
Пусть таковым телом является барабанная перепонка уха человека. Какова кинетическая энергия W_0 барабанной перепонки под действием звуковой волны на пороге слышимости I_0 для человека, если масса перепонки m = 0,1 г? Сравнить W_0 с W_T.
Каков порог слышимости I_0 у кролика, если площадь его барабанной перепонки в 10 раз больше, чем у человека? Принять, что масса перепонки у кролика и ее кинетическая энергия на пороге слышимости такие же, как у человека.

1.23. (*2*) Исследовать слуховое восприятие человеком звука на различных частотах, пользуясь диаграммой слуха (зависимостью давления p от частоты f на пороге слышимости и на болевом пороге). Вычислить амплитуды для давления p, скорости V, смещения частиц, а также интенсивность I в звуковой волне на частотах 250 и 2000 Гц на пороге слышимости и на болевом пороге. Определить интенсивность звука в дБ при давлении $2\cdot 10^{-3}$ Па на частотах 32, 2000 и 16000 Гц. Найти интенсивность звука точечного источника мощностью 10^{-5} Вт (человеческая речь) на расстоянии 5 м на частотах 250 и 2000 Гц.
Литература
Х. Кухлинг. Справочник по физике, 1982, с. 263.

1.24. (*2*) Сотовая связь в стандарте GSM 1800 работает на передачу на частоте 915 МГц. Диаграмма направленности антенны телефона имеет вертикальную ось симметрии. Угловая ширина диаграммы направленности в вертикальной плоскости равна 90°. Мощность импульсов, излучаемых антенной телефона составляет 1 Вт. Минимальная интенсивность, принимаемая базовой станцией оператора, равна $I_{\min} = 10^{-10}$ Вт/м^2.

1) Рассчитать максимальное расстояние L, на котором возможен прием базовой станцией сообщений сотового телефона. Определить напряженность электрического E и магнитного H полей у антенны телефона и у антенны базовой станции для этого расстояния.
2) Рассчитать, насколько сокращается дальность приема L, если интенсивность падает на β = 2 дБ (телефон плотно прижат к уху абонента), β = 6 дБ (телефон в автомобиле) и β = 9 дБ (телефон в здании).
3) Определить, насколько сокращается дальность приема в городских условиях, где из-за рассеяния и переотражения волн на зданиях плотность мощности изменяется с расстоянием пропорционально L^{-3}.
Указание: уменьшение интенсивности на β дБ определяется соотношением $\beta = 10\lg\left(I_0 / I(\beta)\right)$, где I_0 – интенсивность в отсутствие экранирования.

1.25. (*2*) В совместном франко-германском проекте "Teramobile" для зондирования атмосферы используется мощный фемтосекундный лазер на кристалле сапфира, активированного ионами титана (Ti:sapphire laser). Лазер излучает на длине волны λ_0 = 0,8 мкм. Длительность импульса, измеренная по уровню 0,5 от пиковой интенсивности, равна $t_{0,5}$ = 70 фс. Диаметр выходного пучка $D_{e^{-2}}$, измеренный по уровню e^{-2} от пиковой интенсивности, равен $D_{e^{-2}}$ = 5 см. Энергия импульса W = 350 мДж.
Пространственно-временное изменение интенсивности в лазерном импульсе подчиняется гауссовой зависимости, которая обычно используется, в частности, при численных исследованиях:

$$I(x, y, z = o, t) = I_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a_0^2}\right)\exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right).$$

Определить параметры используемой гауссовой зависимости: радиус гауссового пучка a_0 (см); параметр длительности гауссового импульса τ_0 (с); пиковую интенсивность I_0 (Вт/см^2); максимальную амплитуду напряженности электрического поля E_0 (В/м).
Изобразить график изменения интенсивности $I(x, y^*, t^*)$ по поперечной координате x, где y^* и t^* фиксированы, а также изменения во времени $I(x^*, y^*, t)$, где x^* и y^* фиксированы. Нанести на этих графиках заданные параметры $D_{e^{-2}}$ и $t_{0,5}$ и параметры гауссовой зависимости a_0 и τ_0.

1.26. (*2*) Фемтосекундный “T^4–лазер“ (Table-Top-Terawatt-Ti:sapphire laser) излучает импульсы на длине волны λ_0 = 0,8 мкм. Длительность импульса, измеренная по уровню 0,5 от пиковой интенсивности, равна $t_{0,5} = 150$ фс. Пиковая интенсивность в импульсе составляет составляет $I_0 = 10^{11}$ Вт/см^2. Диаметр выходного пучка $D_{e^{-2}}$, измеренный по уровню e^{-2} от пиковой интенсивности, равен $D_{e^{-2}} = 3$ см. Частота следования импульсов f = 10 Гц. Пространственно-временное изменение интенсивности в лазерном импульсе подчиняется гауссовой зависимости, которая обычно используется, в частности, при численном моделировании:

$$I(x, y, z = o, t) = I_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a_0^2}\right)\exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right).$$

Записать изменение напряженности электрического поля в пространстве и времени $E(x, y, z, t)$ в виде квазигармонической волны, распространяющейся по оси OZ и определить следующие ее параметры: характерную длину $l_{e^{-1}}$ области, которую занимает импульс по оси OZ, полагая, что на границе области интенсивность поля в e раз меньше пиковой величины I_0; число осцилляций светового поля, укладывающихся на длине $l_{e^{-1}}$ (для подтверждения применимости квазигармонического приближения).
Изобразить мгновенную картину изменения по оси OZ светового поля в центре пучка $E(x = 0, y = 0, z, t = const)$ и указать на ней характерные масштабы этого изменения: длину волны λ_0; характерную длину $l_{e^{-1}}$ импульса, определенную по уровню e^{-1} от пиковой интенсивности; характерную длину импульса $l_{0,5}$, определенную по уровню 0,5 от пиковой интенсивности.

1.27. (*3*) Использование лазерных импульсов фемтосекундного диапазона длительности позволяет получить сверхсильные световые поля при малой энергии отдельного импульса W. В сверхсильных световых полях электрическая напряженность E_0 близка к напряженности поля внутри атома $E_a \approx 5 \cdot 10^9$ В/м. Показать возможность получения сверхсильного светового поля, рассмотрев излучение современного фемтосекундного лазера на кристалле сапфира, активированного ионами титана (Ti:Sapphire – laser).

Лазер излучает на длине волны λ_0 = 0,8 мкм. Энергия импульса W = 5 мДж, его длительность $t_{0,5}$, измеренная по уровню 0,5 от пиковой (максимальной) интенсивности I_0, равна $t_{0,5}$ = 150 фс. Радиус выходного пучка $a_{e^{-2}}$, измеренный по уровню e^{-2} от пиковой интенсивности, составляет $a_{e^{-2}} = 5$ мм. Частота следования импульсов f = 10 Гц.

Изменение интенсивности в пространстве и времени $I(x, y, z = 0, t)$ на выходе лазера близко к гауссовой зависимости:

$$I(x, y, z = o, t) = I_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{a_0^2}\right) \exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right).$$

Такая модель фемтосекундного лазерного импульса обычно используется в численном моделировании.

Определить параметры сверхсильного светового поля, формирующегося при фокусировке импульса в вакууме. Положить, что в фокусе пучок имеет гауссов профиль радиуса $a_F = 2{,}5$ мкм и рассчитать пиковую интенсивность в фокусе I_F (Вт/см^2); максимальную амплитуду напряженности электрического поля в фокусе E_F (В/м); продольный Z_F и поперечный D_F размеры области, в которой амплитуда светового поля превышает внутриатомную величину $E_a \approx 5 \cdot 10^9$ В/м.

§2. Волны на границе раздела

Краткие теоретические сведения

При падении волны на границу раздела двух сред с различными импедансами Z_1 и Z_2 (см.(1.19) и (1.31)) возникает волна, отраженная от границы, и волна, прошедшая через нее. Из условий сопряжения возмущений на границе раздела двух сред следуют соотношения для амплитуд и интенсивностей падающей, отраженной и прошедшей волн.

Для звуковой волны условия сопряжения следуют из равенства давлений и отсутствия разрывов в скорости движения частиц в первой «1» и второй «2» средах непосредственно у границы раздела. В первой среде давление равно сумме давлений падающей p_1 и отраженной p'_1 волн, во второй – давлению прошедшей волны p_2:

$$p_1 + p_1' = p_2 . \tag{2.1}$$

Отсутствие разрывов в перемещении сред означает непрерывное изменение нормальной компоненты скорости движения частиц на границе раздела в средах «1» и «2», что приводит к равенству:

$$V_1 + V_1' = V_2 . \tag{2.2}$$

Для электромагнитной волны справедливы условия о непрерывном изменении на границе раздела тангенциальных компонент напряженностей электрического и магнитного полей, которые являются следствиями уравнений Максвелла:

$$E_{1t} + E_{1t}' = E_{2t} \qquad (2.3)$$
$$H_{1t} + H_{1t}' = H_{2t} ,$$

где E_1, H_1 – напряженности полей в падающей волне, E_1', H_1' – в отраженной, E_2, H_2 – в прошедшей.

В случае нормального падения волны на плоскую границу раздела из условий (2.1) и (2.2) и соотношения (1.20) для звуковой волны, а также из условий (2.3) и соотношения (1.32) для электромагнитной волны следует, что относительные величины возмущений для отраженных (p_1' / p_1; E_1' / E_1) и прошедших (p_2 / p_1; E_2 / E_1) волн зависят только от импедансов сред Z_1, Z_2 и определяются выражениями:

$$R_{P,E} = \frac{p_1'}{p_1} = \frac{E_1'}{E_1} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}, \quad T_{P,E} = \frac{p_2}{p_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \tag{2.4}$$

Для электромагнитных волн выражения (2.4) обычно записываются через показатели преломления сред:

$$R_E = \frac{E_1'}{E_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \quad T_E = \frac{E_2}{E_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) следует, что при $Z_2 < Z_1$ или при $n_2 > n_1$ (для электромагнитной волны) отражение от границы раздела происходит в противофазе, при котором давление p_1' или напряженность E_1' в отраженной волне сдвинуты по фазе на π радиан от соответствующих возмущений в падающей волне. Для относительных амплитуд отраженной и прошедшей волн имеет место соотношение:

$$T_{p,E} - R_{p,E} = 1. \tag{2.6}$$

Коэффициенты отражения R_I и прохождения T_I для энергии звуковой и электромагнитной волн на границе раздела двух сред согласно (2.4) и соотношениям (1.25) и (1.38) равны:

$$R_I = \frac{I_1'}{I_1} = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}\right)^2, \; T_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}, \tag{2.7}$$

где I_1, I_1' и I_2 – интенсивности падающей, отраженной и прошедшей волн, соответственно.

Коэффициенты отражения R_I и прохождения T_I энергии записываются через показатели преломления сред следующим образом:

$$R_I = \frac{I_1'}{I_1} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2, \; T_I = \frac{I_2}{I_1} = \frac{4n_1n_2}{(n_2 + n_1)^2}. \tag{2.8}$$

Коэффициенты отражения R_I и прохождения T_I волны через границу раздела двух сред инвариантны относительно индексов, определяющих среды. Это означает, что интенсивность отраженной волны не зависит от того, с какой стороны падает волна на границу раздела. Аналогичное утверждение имеет место и для волны, прошедшей через границу раздела.

Нетрудно видеть, что сумма коэффициентов отражения и прохождения энергии равна единице, что является следствием закона сохранения энергии для волн:

$$R_I + T_I = 1. \tag{2.9}$$

Примеры решения задач

Пример 2.1. Найти толщину h_2 и показатель преломления n_2 пленки просветляющего покрытия на длине волны $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м (сине-зеленый цвет) для очковых стекол с показателем преломления $n_3 = 1{,}5$. Записав условия сопряжения для векторов электрической E и магнитной H напряженности на границах раздела воздух–пленка и пленка–стекло и используя понятие импеданса, выразить амплитуду световой волны E_3 в стекле через амплитуду E_1 падающей в воздухе. Показать, что при пленке толщиной $h_2 = \lambda/4n_2$, где $n_2 = \sqrt{n_3}$, свет длины волны λ не отражается от просветленных очков.

При решении использовать следующие допущения: (а) среды не магнитные и $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$; (б) в воздухе показатель преломления $n_1 = 1$; (в) в воздухе и пленке существуют падающая и отраженная волны, в стекле – только прошедшая.

Решение. Рассмотрим случай нормального падения на границу раздела двух диэлектрических сред плоской электромагнитной волны с векторами напряженности электрического и магнитного поля $\mathbf{E_1}$ и $\mathbf{H_1}$, соответственно. Часть излучения проходит через границу раздела, а часть – отражается. Обозначим напряженности полей в прошедшей волне: $\mathbf{E}_2$ и $\mathbf{H}_2$, в отраженной – $\mathbf{E}_1'$ и $\mathbf{H}_1'$. По принципу суперпозиции в первой среде напряженность электрического поля равна сумме $\mathbf{E_1} + \mathbf{E_1'}$, магнитного – $\mathbf{H_1} + \mathbf{H_1'}$.

Из курса "Электричество и магнетизм" известно, что на границе раздела двух диэлектриков выполняются условия непрерывности для тангенциальных компонент векторов напряженности электрического и магнитного поля. Заметим, что при нормальном падении плоской электромагнитной волны на плоскую границу раздела сред вектор напряженности электрического (магнитного) поля имеет только тангенциальную компоненту. Поэтому граничные условия (2.3) записываются в виде

$$E_1 + E_1' = E_2 \text{ и } H_1 - H_1' = H_2 .$$

Знак минус во втором соотношении возникает из-за того, что в электромагнитной волне вектора **k, E, H** ориентированы так, что образуют правую тройку. Известно, что для плоской электромагнитной волны выполняется соотношение (1.32):

$$E = Z \cdot H.$$

Поэтому граничные условия можно переписать в виде

$$E_1 + E_1' = E_2,$$

$$E_1 / Z_1 - E_1' / Z_1 = E_2 / Z_2.$$

Используя выражения (2.4) для относительной величины напряженностей электрического поля в отраженной ($R_E = E_1' / E_1$) и прошедшей ($T_E = E_2 / E_1$) волнах, получаем следующую систему уравнений относительно R_E и T_E:

$$1 + R_E = T_E,$$

$$1 - R_E = T_E \cdot Z_1 / Z_2.$$

Решение этой системы имеет вид $R_E = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$, $T_E = \dfrac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$. Учитывая выражение (1.33), устанавливающее связь импеданса и показателя преломления, перепишем решение в виде $R_E = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$, $T_E = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2}$.

Коэффициенты отражения и пропускания, определенные как отношения соответствующих интенсивностей (2.8), имеют вид $R_I = \dfrac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$, $T_I = \dfrac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$. Заметим, что в соответствии с законом сохранения энергии имеет место равенство: $R_I + T_I = 1$.

Рассмотрим теперь систему, состоящую из трех сред: воздух, который обозначим индексом 1, пленка с индексом 2, и стекло с индексом 3. В системе две границы: первая – между воздухом и пленкой, вторая – между пленкой и стеклом. В воздухе полный световой поток, отразившийся от стекла с нанесенной на него пленкой, будет складываться из волны, отраженной от границы воздух–пленка, интенсивность которой обозначим $I_1^{(1)}$; волны, прошедшей через эту границу, отраженной от границы пленка–стекло и снова прошедшей через границу воздух–пленка (ее интенсивность – $I_1^{(2)}$) и т.д. Полная интенсивность $I_{\text{отр}}$ отраженной волны в воздухе представима в виде бесконечной суммы интенсивностей: $I_{\text{отр}} = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + I_1^{(3)} + \ldots$.

Поскольку мы имеем две границы раздела: воздух–пленка и пленка–стекло, то введем для коэффициентов отражения и пропускания два индекса. Так, например, для первой границы воздух–пленка коэффициент отражения, опуская индекс *I*, обозначим R_{12}, а коэффициент пропускания T_{12}. Для второй границы коэффициент отражения – R_{23}. Нетрудно показать, что слагаемые ряда полной интенсивности представимы в виде: $I_1^{(1)} = R_{12} I_1$, $I_1^{(2)} = T_{12}^2 R_{23} I_1$, $I_1^{(3)} = R_{12} R_{23} I_1^{(2)}$ и т.д.. Здесь мы используем то обстоятельство, что коэффициенты отражения и пропускания для интенсивности волны инварианты относительно перестановки индексов (например, $R_{12} = R_{21}$ и т.д.). Прямым расчетом можно показать, что, начиная с $n = 2$, выполняется рекуррентное соотношение $I_1^{(n+1)} = R_{12} R_{23} I_1^{(n)}$. Таким образом, полную интенсивность отраженного света можно представить в виде

$$I_{\text{отр}} = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} + I_1^{(3)} + \ldots = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} \sum_{n=0}^{\infty} (R_{12} R_{23})^n .$$

Второе слагаемое в полученном выражении является суммой членов геометрической прогрессии со знаменателем $R_{12} R_{23} < 1$, поскольку коэффициент отражения всегда меньше единицы. В результате для интенсивности отраженного света получаем выражение:

$$I_{\text{отр}} = I_1^{(1)} + I_1^{(2)} \frac{1}{1 - R_{12} R_{23}} = I_0 (R_{12} + \frac{T_{12}^2 R_{23}}{1 - R_{12} R_{23}})$$

Введем полный коэффициент отражения стекла с пленкой как $R_I = I_{\text{отр}} / I_1$, тогда $R_I = R_{12} + \dfrac{T_{12}^2 R_{23}}{1 - R_{12} R_{23}}$. Заметим, что при отражении света от границы раздела воздух–стекло ($n_{\text{ст}} = 1.5$) коэффициент отражения составляет $R_I = 0{,}04$. Несмотря на то, что мы не знаем показателя преломления пленки, есть основания предполагать, что в знаменателе последнего выражения произведение коэффициентов отражения много меньше единицы. Тогда, полный коэффициент отражения можно приближенно представить в виде $R_I \approx R_{12} + T_{12}^2 R_{23}$. Это выражение означает, что при анализе отраженного светового потока значимыми являются только две волны: волна, непосредственно отраженная от границы воздух–пленка, и волна, которая образовалась после прохождения через эту границу, отражения от границы пленка–стекло и повторного прохождения через первую границу.

Перейдем опять к рассмотрению напряженностей электрических полей. В воздухе напряженность электрического поля $E_1^{(1)}$ в волне, отраженной от первой границы раздела, записывается в следующем виде:

$$E_1^{(1)} = E_1 R_{E12} \exp[i(\omega t + k_1 x)].$$

Здесь мы используем коэффициенты R_E и T_E, определенные как отношения напряженностей полей. (Эти коэффициенты НЕ инвариантны относительно перестановки индексов.) Для волны, отраженной от второй границы раздела и дважды прошедшей первую границу в прямом и обратном направлениях, можно записать соотношение:

$$E_1^{(2)} = E_1 T_{E12} R_{E23} T_{E21} \exp[i(\omega t + k_1 x + \varphi)].$$

Дополнительный фазовый набег φ связан с тем, что вторая волна дважды проходит через пленку. Величина фазового набега определяется как $\varphi = 2k_2 h_2$ (см. раздел «Интерференция»).

Как было показано, амплитуды отраженных волн, которые образовались при отражении дважды и более двух раз от границ раздела, много меньше, чем $E_1^{(1)}$ и $E_1^{(2)}$, поэтому суммарную напряженность электрического поля отраженной световой волны в воздухе можно представить в виде:

$$E_{\text{отр}} \approx E_1^{(1)} + E_1^{(2)} = E_1 \exp[i(\omega t + k_1 x)](R_{E12} + T_{E12} R_{E23} T_{E21} \exp(i\varphi)).$$

Потребуем, чтобы полная напряженность электрического поля $E_{\text{отр}}$ отраженной световой волны равнялась нолю. Для этого должна равняться нолю сумма в круглых скобках. Амплитуды волн, отраженных от границ раздела, много меньше амплитуды падающей волны, то есть имеет место неравенство: $|R_{E12}|, |R_{E23}| << 1$. Отсюда, согласно (2.6) справедливо: $|T_{E12}|, |T_{E21}| \approx 1$. Для простоты положим, что произведение $T_{E12} \cdot T_{E21} = 1$. Тогда, условие равенства нолю полной напряженности $E_{\text{отр}}$ запишется в виде $R_{12} + R_{23} \exp(2ik_2 h_2) = 0$. Очевидно, что это равенство выполняется, если $R_{12} = R_{23}$ и $2k_2 h_2 = \pi$. Из условия $R_{12} = R_{23}$, которое принимает вид: $\dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \dfrac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3}$, можно найти показатель преломления пленки:

$n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$. Поскольку показатель преломления воздуха n_1 практически равен единице, то $n_2 \approx \sqrt{n_3} \approx 1{,}22$.

Осталось определить толщину h_2 просветляющей пленки: $h_2 = \pi / 2k_2 = \lambda_2 / 4 = \lambda / 4n_2$. Подставляя численные значения, получаем, что $h_2 \approx 0{,}1$ мкм.

Пример 2.2. Плоская гармоническая электромагнитная волна падает нормально на стеклянную плоскопараллельную пластинку толщиной h. Определить относительную мощность отраженного и прошедшего излучения. Показатель преломления стекла $n_с$ = 1,5, воздуха $n_в$ = 1. Считать $h >> \lambda$, где λ – длина волны. Интерференцией волн пренебречь.

Решение. При рассмотрении примера 2.1 было получено выражение для полного коэффициента отражения системы с двумя границами раздела и, соответственно, тремя средами. В данном случае мы также имеем две границы раздела, но первая и третья среды одинаковы (воздух). В связи с этим формула для полного коэффициента отражения по интенсивности, полученная в примере 2.1 приобретает вид $R = R_{12} + \dfrac{T_{12}^2 R_{12}}{1 - R_{12}^2}$. Используя другие формулы предыдущего примера, находим, что R_{12} = 0,04 и T_{12} = 0,96. Подставив эти значения, получаем, что полная мощность излучения, отраженного от плоскопараллельной стеклянной пластинки, составляет примерно 7,7% от мощности падающего излучения. В соответствие с законом сохранения энергии в отсутствии поглощения относительная мощность излучения, прошедшего через пластинку, составляет примерно 92,3%.

Пример 2.3. Плотность земной атмосферы убывает с высотой z над поверхностью Земли. Вызванное этим уменьшение показателя преломления воздуха $n(z)$ с высотой приводит к искривлению лучей в атмосфере (астрономической рефракции). В результате Солнце на горизонте видно после того, как оно ушло за линию горизонта на угол φ.

Получить выражение для радиуса кривизны луча в атмосфере, как неоднородной среде.

Получить оценку угла астрономической рефракции φ для Солнца на горизонте, приняв следующее: высота атмосферы h составляет 10 км; показатель преломления воздуха n зависит от его плотности ρ так, что

$\partial n/\partial\rho$ = 0,21 см^3/г; изменение плотности воздуха в атмосфере с высотой $\rho(z)$ определяется барометрической формулой. При оценке взять $\partial n(z)/\partial z$, равным значению $\partial n(0)/\partial z$ на поверхности Земли.

Решение. Рассмотрим распространение световой волны в среде, показатель преломления которой изменяется по одной из координат (например, z). Такую среду можно условно разбить на совокупность бесконечно тонких слоев. Пусть при этом слой, находящийся на высоте z имеет показатель преломления n, а слой с координатой $z + dz$ – показатель преломления $n + dn$. Тогда, в соответствие с законом Снеллиуса, который связывает угол падения α с углом преломления $\alpha + d\alpha$ на границе раздела слоев, имеем

$$n\sin\alpha = (n+dn)\sin(\alpha+d\alpha)\,.$$

Это соотношение можно преобразовать к следующему виду:

$$n\sin\alpha = (n+\frac{dn}{dz}dz)\left[\sin\alpha\cos(d\alpha)+\sin(d\alpha)\cos\alpha\right].$$

Используя разложение тригонометрических функций в ряд Тейлора при $d\alpha << 1$ и пренебрегая членами второго порядка малости, получаем

$$n\sin\alpha = n\sin\alpha + \frac{dn}{dz}\sin\alpha dz + n\cos\alpha d\alpha$$

или

$$\frac{d\alpha}{dz} = -\frac{1}{n}tg\alpha\frac{dn}{dz}\,.$$

Непрерывное изменение показателя преломления $n(z)$ с координатой z приводит к тому, что волновой вектор **k** плавно поворачивается при распространении волны. Атмосфера – изотропная среда, и ориентация вектора **k** совпадает с направлением распространения энергии волны, то есть лучом. В результате луч света в атмосфере имеет вид некой кривой. Аппроксимируем луч центральной кривой второго порядка, например, окружностью с радиусом кривизны r. Будем считать, что этот радиус незначительно изменяется с координатой z. Тогда справедливо соотношение, следующее из геометрии рассматриваемой системы: $z/r = \sin\alpha$. Продифференцировав это соотношение, получим $\dfrac{d\alpha}{dz} = \dfrac{1}{r\cos\alpha}$.

Сопоставляя два выражения для производной угла α по координате z, получаем

$$\frac{1}{r\cos\alpha} = -\frac{1}{n}tg\alpha\frac{dn}{dz}\,.$$

По условиям задачи солнечные лучи падают почти горизонтально на земную атмосферу, то есть угол падения α близок к $\pi/2$. Поэтому $\mathrm{tg}\alpha \approx 1/\cos\alpha$, и последнее соотношение принимает вид

$$\frac{1}{r} = -\frac{1}{n}\frac{dn}{dz}.$$

Зависимость показателя преломления $n(z)$ определяется изменением плотности атмосферного воздуха с высотой, поэтому $\frac{dn}{dz} = \frac{dn}{d\rho}\frac{d\rho}{dz}$.

Изменение плотности дается барометрической формулой, которая имеет вид: $\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\mu g z}{RT}\right)$, где μ – молярная масса воздуха. С учетом уравнения состояния идеального газа, записанного для одного моля ($pV = RT$) получаем:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 g z}{p_0}\right) \text{ и } \frac{d\rho}{dz} = -\frac{\rho_0^2 g}{p_0}\exp\left(-\frac{\rho_0 g z}{p_0}\right).$$

Подставляя $\frac{d\rho}{dz}$ в $\frac{dn}{dz}$, а затем в полученное ранее выражение для кривизны луча $1/r$, получаем искомую оценку радиуса кривизны:

$$r = n\left(\frac{dn}{d\rho}\right)^{-1}\frac{p_0}{\rho_0^2 g}.$$

Принимая для воздуха $n \approx 1$ и подставляя численные значения, получаем $r \approx 3\cdot 10^7$ м (для сравнения: радиус Земли составляет примерно 6400 км).

На закате или восходе солнечный луч практически по касательной входит в земную атмосферу на высоте h и достигает глаза наблюдателя, находящегося на поверхности земли, распространяясь также по касательной к поверхности. Очевидно, что угол между этими двумя касательными и является углом астрономической рефракции φ. Можно записать простое геометрическое соотношение:

$$r\varphi \approx \sqrt{(R_З + h)^2 - R_З^2}.$$

Учитывая, что высота атмосферы h много меньше радиуса Земли $R_З$, получаем

$$\varphi = \frac{\sqrt{2R_З h}}{r}.$$

Подставляя численные значения, имеем $\varphi \approx 1{,}2 \cdot 10^{-2}$ рад (для сравнения: средний угловой диаметр Солнца составляет $9{,}3 \cdot 10^{-3}$ рад). Из-за астрономической рефракции увеличивается светлое время суток (мы видим Солнце, находящееся за горизонтом). Для полученного угла φ это удлинение составляет по 2,7 мин при восходе и заходе Солнца.

Задания для самостоятельной работы[1]

2.4. (*1*) Плоская звуковая волна интенсивности A = 70 дБ падает нормально на плоскую поверхность воды. Записав условия сопряжения для скорости частиц V и давления p на границе раздела двух сред и используя понятие импеданса, вычислить для прошедшей волны в воде: интенсивность A в дБ, интенсивность I в Вт/м^2, давление p в Па, скорость, смещение и ускорение частиц на частоте $f = 3 \cdot 10^3$ Гц.

Сравнить вычисленные параметры волны в воде с соответствующими параметрами падающей волны в воздухе. При записи условий сопряжения учитывать, что в воздухе распространяются падающая и отраженная волны, а в воде – только прошедшая.

Литература

Ф. Крауфорд, Волны, 1974, гл. 5.

Г. Пейн. Физика колебаний и волн., 1979, гл. 4.

2.5. (*1*) Определить величину давления монохроматического света с длиною волны λ = 0,63 мкм на плоскую переднюю поверхность стеклянной пластины с показателем преломления n = 1,5. Плотность потока световой волны $S = 10^7$ Вт/м^2. Вычислить коэффициенты отражения и пропускания для границы раздела. Отражение волны от задней границы стеклянной пластины не учитывать.

Литература

Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 23, § 135, гл. 34, § 185,186.

Л.Н. Капцов, Физика элементов ЭВМ, гл. 3, § 10.

2.6. (*1*) Плоская гармоническая волна падает нормально на плоскопараллельную диэлектрическую пластинку. Найдите

---

[1] В скобках указана степень сложности задания, которая оценивается в баллах от 1 (наименьшая сложность) до 3 (наибольшая сложность).

диэлектрическую проницаемость ε пластины, при которой мощность проходящего света составляет 30% от мощности падающего. Диэлектрическую проницаемость воздуха принять равной единице. Магнитная проницаемость пластины μ = 1.

Литература

Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 23, § 135.
Л.Н. Капцов, Физика элементов ЭВМ, гл. 3, § 10.

2.7. (*2*) Плоская гармоническая электромагнитная волна падает нормально на плоскую границу раздела двух идеальных диэлектриков с показателями преломления $n_1 = 1{,}1$ и $n_2 = 2{,}0$. Определить долю проходящего через границу излучения и относительную величину для амплитуд стоячей и бегущей волн в первой среде.

Литература

Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 5, § 23, гл. 23, § 135.
Л.Н. Капцов, Физика элементов ЭВМ, гл. 3, §§ 10,11.

2.8. (*1*) Плоская монохроматическая волна падает нормально на границу раздела двух идеальных диэлектриков. Найдите диэлектрические проницаемости сред, при которых от границы отражается половина мощности излучения.

Литература

Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 23, § 135.
Л.Н. Капцов, Физика элементов ЭВМ, гл. 3, § 10.

2.9. (*3*) Скорость звука в морской воде возрастает с увеличением температуры, солености и гидростатического давления. В поверхностном слое $z = 100 - 200$ м скорость звука уменьшается за счет падения температуры с глубиной z. С увеличением глубины z скорость звука растет вследствие увеличения солености и гидростатического давления. Область минимума скорости звука образует подводный звуковой канал (ПЗК). Исследовать распространение акустических волн в ПЗК, принимая, что скорость звука увеличивается с глубиной z по линейному закону: $c(z) = c_0(1 + az),\ \ z \in [0, z_m]$.

1) Пользуясь законом преломления показать, что траекторией луча, изначально распространяющегося вниз под скользящим углом α к поверхности воды, является окружность. Определить радиус и координаты

центра окружности как функции параметра a и угла α между направлением начального распространения луча и поверхностью воды.

2) Определить максимальную длину цикла Δ_{max} (расстояние между точками, где луч входит в воду и выходит на ее поверхность) для канала толщиной z.

3) Оценить Δ_{max} для вод северо-западной части Тихого океана, приняв, что скорость звука меняется от 1450 м/с при $z = 0$ до 1480 м/с при $z = 1000$ м.

Литература

Акустика океана, под ред. Л.М. Бреховских, 1974.

2.10. (*2*) Найти показатель преломления n газа и его градиент dn/dh по высоте h на Венере, атмосфера которой состоит из углекислого газа CO_2 с поляризуемостью молекул $\alpha = 2{,}7\cdot 10^{-23}$ см^3. Найти радиус кривизны r светового луча, пущенного горизонтально. Каковы отличия венерианской и земной рефракции света?

Указания:

1) Для показателя преломления газа принять зависимость $n = \sqrt{1 + 4\pi\alpha N}$.

2) Изменение концентрации молекул газа $N(h)$ с высотой h подчиняется распределению Больцмана:

$$N(h) = \frac{P_0}{kT}\exp\left(-\frac{mg_{\text{В}}h}{kT}\right),$$

где m – масса молекулы CO_2, ускорение свободного падения на Венере $g_{\text{В}}$ = 8,76 м/с^2, а температура атмосферы Венеры Т = 740 К.

3) Показать, что радиус кривизны горизонтального луча определяется соотношением $1/r = (1/n)\, dn/dh$.

2.11. (*1*) Под каким углом к горизонту виден мираж в пустыне, если температура воздуха падает на 3°С на высоте 1 м от нагретой поверхности песка? Принять, что в воздухе изменение диэлектрической проницаемости с температурой равно: $\partial\varepsilon/\partial T = -1{,}95\cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$.

2.12. (*1*) Вы едете по автостраде в жаркий солнечный день. Вдали шоссе блестит, как водная гладь. Оценить расстояние до ближайшего края кажущегося водоема, приняв, что температура воздуха у поверхности шоссе скачком возрастает на 3°С. Изменение показателя преломления воздуха с температурой $\partial n/\partial T = -0{,}98\cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$. Высоту наблюдателя над поверхностью шоссе принять равной h = 1,7 м.

2.13. (*2*) Плоская линейно-поляризованная волна частоты ω падает в стекле на плоскую границу раздела: стекло–воздух с углом падения $\vartheta = 60°$. Вектор электрического поля перпендикулярен плоскости падения. Найти компоненты вектора Умова–Пойнтинга в воздухе. Определить среднюю плотность потока энергии в направлении, перпендикулярном к границе раздела, и вдоль границы раздела. Оценить по компонентам вектора Умова–Пойнтинга глубину проникновения волны в воздух.

Литература

Н.И. Калитиевский, Волновая оптика, 1978, § 2.4.

И.Н. Мешков, Б.В. Чириков, Электромагнитное поле, 1987, ч. 1, § 74.

§3. Поляризация волн

Краткие теоретические сведения

Понятие поляризации используется для того, чтобы характеризовать пространственную ориентацию векторов напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне.

В плоской электромагнитной волне вектора напряженности электрического и магнитного полей взаимно перпендикулярны и каждый из них перпендикулярен волновому вектору (направлению распространения волны). Если при распространении волны вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ остается в одной плоскости, которой принадлежит и волновой вектор $\mathbf{k}$, то говорят о линейной поляризации волны. При этом плоскость, которой принадлежат вектора $\boldsymbol{E}$ и $\mathbf{k}$, называется плоскостью поляризации линейно-поляризованной световой волны.

Суперпозиция двух линейно-поляризованных волн с ортогональными плоскостями поляризации при разных амплитудах и произвольным сдвиге фаз дает эллиптически поляризованную волну. В такой волне перемещение конца вектора напряженности электрического поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, описывается уравнением эллипса. Ориентация осей эллипса и значения полуосей определяются амплитудами линейно-поляризованных волн и фазовым сдвигом между ними.

Суперпозиция двух ортогонально линейно-поляризованных волн с одинаковыми амплитудами дает циркулярно поляризованную волну (волну с круговой поляризацией).

Если ориентация и абсолютное значение вектора напряженности электрического поля в плоскости, перпендикулярной распространению волны, изменяются по мере распространения волны случайным образом, то говорят о естественно поляризованном (неполяризованном или деполяризованном) излучении.

Если естественно поляризованный свет падает на границу раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 под углом Брюстера, то отраженный свет оказывается поляризованным перпендикулярно плоскости падения, то есть плоскости, проходящей через волновой вектор падающей волны и нормаль к границе раздела. Значение угла Брюстера определяется соотношением

$$tg\alpha_{\text{Б}} = n_2 / n_1 . \qquad (3.1)$$

Например, для луча, падающего на границу раздела воздух–стекло, значение угла Брюстера – $\alpha_Б \approx 57^{0}$ ($n_{ст}$ = 1,53).

Кристаллические среды обладают свойством двойного лучепреломления. Если на двулучепреломляющую среду падает луч света с естественной поляризацией, то, в общем случае, в среде распространяются два преломленных луча, что обусловлено зависимостью показателя преломления таких сред от ориентации вектора электрической напряженности. Таким образом, в двулучепреломляющей среде возникают две волны со взаимно перпендикулярными плоскостями поляризации. Угол между направлениями распространения этих волн в среде зависит от ориентации кристалла. Угол преломление одного из лучей подчиняется закону Снеллиуса. Такой луч принято называть обыкновенным (ordinary). Преломление второго (необыкновенного, extraordinary) луча не подчиняется закону Снеллиуса: например, при нормальном падении необыкновенный луч может распространяться под некоторым углом к нормали. Существуют ориентации кристалла относительно падающего луча, при которых углы преломления обыкновенного и необыкновенного лучей равны (лучи распространяются в одном и том же направлении). Показатели преломления для обыкновенного (n_o) и необыкновенного (n_e) лучей различны. Это приводит, в частности, к тому, что волна с линейной поляризацией после прохождения через двулучепреломляюий кристалл может стать эллиптически поляризованной. На этом свойстве построено действие фазовых пластинок, которые вносят контролируемый сдвиг фазы между волнами ортогональной поляризации. Тем самым с их помощью осуществляется изменение поляризации света.

Некоторые среды обладают свойством оптической активности, которое состоит в повороте плоскости поляризации линейно поляризованного излучения, прошедшего через среду. Это свойство связано с эффектом кругового двулучепреломления (различием коэффициентов преломления право- и лево-циркулярно поляризованных волн). Угол поворота плоскости поляризации можно определить при помощи одного из соотношений

$$\varphi = \alpha \cdot d \,, \tag{3.2}$$

$$\varphi = [\alpha] \cdot c \cdot d \,, \tag{3.3}$$

где α – вращательная способность, $[\alpha]$ – удельное вращение, c – концентрация раствора и d – длина образца. Первое соотношение используют для чистых веществ, второе – для растворов.

Примеры решения задач

Пример 3.1. Показать, что эллиптически поляризованная волна может быть представлена в виде суперпозиции двух линейно-поляризованных гармонических волн с ортогональными плоскостями поляризации.

Решение. Пусть волны распространяются по оси *OZ*. Плоскость поляризации одной волны совпадает с плоскостью *XOZ*, другой – с *YOZ*. Тогда две ортогонально линейно-поляризованные волны можно представить в следующем виде:

$$E_{1x}(z,t) = E_{10}\sin(\omega t - kz),\ E_{1y} = E_{1z} = 0$$

$$E_{2y}(z,t) = E_{20}\sin(\omega t - kz + \delta),\ \ E_{2x} = E_{2z} = 0\ .$$

Рассмотрим суперпозицию этих волн, получив связь y-компоненты $E_y(z,t)$ и x-компоненты $E_x(z,t)$ суммарного поля. Для y-компоненты электрического поля суммарной волны имеем

$$E_y(z,t) = E_{20}\sin(\omega t - kz)\cos\delta + E_{20}\cos(\omega t - kz)\sin\delta\ .$$

Используя подстановку $\sin(\omega t - kz) = \dfrac{E_{1x}}{E_{10}}$, взятую из выражения для первой волны, найдем:

$$E_y = E_{20}\frac{E_x}{E_{10}}\cos\delta + E_{20}\sqrt{1-\left(\frac{E_x}{E_{10}}\right)^2}\sin\delta\ .$$

Разделим обе части равенства на E_{20}, перенесем первое слагаемое из правой части равенства в левую и возведем обе части полученного равенства в квадрат. После преобразований получим уравнение относительно компонент $E_y(z,t)$ и $E_x(z,t)$ суммарного поля:

$$\frac{E_y^2}{E_{20}^2} - 2\frac{E_x E_y}{E_{10}E_{20}}\cos\delta + \frac{E_x^2}{E_{10}^2} = \sin^2\delta\ .$$

Пусть $\cos\delta = 0$ $(\sin\delta = \pm 1)$. В этом случае связь компонент суммарного поля определяется уравнением эллипса

$$\frac{E_y^2}{E_{20}^2} + \frac{E_x^2}{E_{10}^2} = 1\ ,$$

а сами компоненты в сечении $z = 0$ представляются в виде

$$E_x = E_{10}\sin\omega t$$

$$E_y = E_{20}\sin(\omega t + \frac{\pi}{2} + \pi n) = (-1)^{n+1} E_{20}\cos\omega t .$$

Видно, что при нечетном n, вектор напряженности электрического поля суммарной волны вращается по часовой стрелке в плоскости $z = 0$, если наблюдатель смотрит навстречу распространяющейся волне.

В общем случае произвольного сдвига фаз ($\cos\delta \neq 0$) компоненты $E_y(z,t)$ и $E_x(z,t)$ подчиняются уравнению эллипса, вписанного в прямоугольник со сторонами $2E_{10}$ и $2E_{20}$.

Пример 3.2. Излучение падает на боковую грань стеклянной призмы (n = 1,5) под углом Брюстера. Плоскость поляризации излучения совпадает с плоскостью падения. Найти преломляющий угол призмы α, при котором излучение проходит через призму без потерь на отражение.

Решение. Для излучения, поляризованного в плоскости падения, коэффициент отражения от границы раздела двух сред равен нолю, если угол падения γ равен углу Брюстера. Таким образом, излучение входит в призму без потерь на отражение. Определим угол преломления γ' на первой (воздух–стекло) границе раздела при помощи закона Снеллиуса: $\sin\gamma = n\sin\gamma'$. По условию задачи $\mathrm{tg}\gamma = n$ (угол Брюстера). Выражая синус угла падения через его тангенс, для угла преломления получаем: $\sin\gamma' = \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$. Используя тригонометрические соотношения, находим $\mathrm{tg}\gamma' = 1/n$. Излучение выйдет из призмы без потерь на отражение, если для угла падения δ на второй (стекло–воздух) границе раздела также будет выполнено условие Брюстера: $\mathrm{tg}\delta = 1/n$. Таким образом, угол преломления для первой границы и угол падения для второй границы равны. Из геометрии задачи следует, что преломляющий угол призмы удовлетворяет соотношению $\alpha = \gamma' + \delta = 2\delta$. Таким образом, $\mathrm{tg}(\alpha/2) = 1/n$, откуда следует $\alpha = 2\mathrm{arcctg}n = \pi - 2\mathrm{arctg}n$. Подставляя численное значение показателя преломления, получаем $\alpha \approx 67°$.

Задания для самостоятельной работы[1]

3.3. (*1*) Показать, что эллиптически поляризованная волна может быть представлена в виде суперпозиции двух волн левой и правой круговой поляризации. Получить связь между амплитудами этих волн.

3.4. (*1*) Проекции вектора напряженности электрического поля плоской электромагнитной волны на оси x и y, перпендикулярные направлению распространения волны, имеют вид: $E_x = E\cos(\omega t - kz)$ и $E_y = E\cos(\omega t - kz + \varphi)$. Определить характер поляризации волны при $\varphi = \pi/4, \pi/3, \pi/2, \pi$. Представить результат графически в виде кривой, которую описывает конец вектора напряженности электрического поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны.

3.5. (*2*) Предложите оптическую схему, состоящую из двух зеркал, которая позволяет повернуть плоскость поляризации линейно-поляризованного излучения на $\pi/2$.

3.6. (*2*) Линейно-поляризованное излучение падает на поверхность стеклянной пластинки под углом Брюстера. Найти коэффициент отражения (по интенсивности), считая заданным угол φ между плоскостью поляризации и плоскостью падения.

3.7. (*2*) Пластина из исландского шпата имеет форму прямоугольного параллелепипеда с толщиной 5 мм. На какую минимальную величину нужно уменьшить (например, при помощи оптической полировки) толщину, чтобы получить (а) четвертьволновую и (б) полуволновую фазовую пластинку?

3.8. (*2*) Как отличить: (а) свет с правой круговой поляризацией от света с левой круговой поляризацией и (б) свет с круговой поляризацией от естественно поляризованного света при помощи четвертьволновой фазовой пластинки и поляроида?

[1] В скобках указана степень сложности задания, которая оценивается в баллах от 1 (наименьшая сложность) до 3 (наибольшая сложность).

3.9. (*2*) Линейно поляризованный свет проходит вдоль оси цилиндрического сосуда, заполненного слегка мутным раствором сахара, который обладает оптической активностью. При наблюдении сбоку (в рассеянном свете) в сосуде видна спираль, шаг которой равен 30 см (опыт демонстрируется на лекции). Определить концентрацию сахара в растворе.

3.10. (*2*) Сравните толщины слоя раствора сахара, соответствующего по концентрации сладкому чаю; двулучепреломляющей пластины из исландского шпата; пластины из кварца, обладающей круговым двулучепреломлением и слоя жидкого кристалла, которые обеспечивают поворот плоскости поляризации на 10°. Используя значения вращательной способности кварца и жидкого кристалла, рассчитать разности показателей преломления для волн левой и правой круговой поляризации для этих веществ.

§4. Спектры

Краткие теоретические сведения

В точке наблюдения, определяемой радиус-вектором $\mathbf{r}$, возмущение $\xi(\mathbf{r},t)$, переносимое волной, меняется во времени. Зарегистрированному сигналу $\xi(t)$, как функции времени, можно сопоставить частотный спектр $S(\omega)$. Между сигналом $\xi(t)$ и его спектром $S(\omega)$ существует однозначная связь:

$$\xi(t) \leftrightarrow S(\omega) . \qquad (4.1)$$

Сигнал $\xi(t)$ называют оригиналом, а частотный спектр $S(\omega)$ – образом Фурье.

Чтобы передать информацию волной, осуществляется изменение во времени ее параметров. Вызванное этим изменение принимаемого сигнала $\xi(t)$ содержит передаваемую информацию. Поскольку между сигналом $\xi(t)$ и его частотным спектром $S(\omega)$ существует однозначная связь, то весь объем предаваемой информации содержит и спектр сигнала $S(\omega)$.

Суммирование гармоник

В гармонической волне изменение возмущения $\xi(\mathbf{r},t)$ во времени происходит на одной частоте, и в точке наблюдения регистрируется гармонический сигнал на частоте волны ω_0, изменение которого во времени описывается зависимостью:

$$\xi(t) = a_0 \cos \omega_0 t , \qquad (4.2)$$

где a_0 – амплитуда сигнала. На оси частот ω гармонический сигнал на фиксированной частоте ω_0 можно представить в виде символической дельта-функции Дирака с весом a_0:

$$S(\omega) = a_0 \, \delta(\omega - \omega_0) . \qquad (4.3)$$

Функция $S(\omega)$ в виде (4.3) является спектром гармонического сигнала на частоте ω_0.

При суммировании двух гармонических сигналов на частотах ω_1, ω_2 и равной амплитуды a_0 частотный спектр $S(\omega)$ выражается суммой двух дельта-функций:

$$S(\omega) = a_0\, \delta(\omega - \omega_1) + a_0\, \delta(\omega - \omega_2)\,. \tag{4.4}$$

Для близких частот ω_1 и ω_2, то есть при $|\omega_1 - \omega_2| << \omega_1, \omega_2$, суммарный сигнал $\xi(t)$ имеет вид биений, и его изменение во времени представляется следующим образом:

$$\xi(t) = 2a_0 \cos\tilde{\omega}t \cdot \cos\omega_0 t\,, \tag{4.5}$$

где $\tilde{\omega} = |\omega_1 - \omega_2|/2$ – частота биений, а $\omega_0 = (\omega_1 + \omega_2)/2$ – несущая частота. Для близких значений ω_1 и ω_2 частота $\tilde{\omega}$ много меньше несущей ω_0.

В радиовещании на длинных ($\lambda = 600 - 1500$ м), средних ($\lambda = 100 - 600$ м) и коротких ($\lambda = 10 - 100$ м) волнах используется модуляция амплитуды электромагнитных волн звуковыми частотами, воспринимаемыми человеком. При гармонической модуляции амплитуды изменение сигнала $\xi(t)$ во времени имеет вид:

$$\xi(t) = a_0(1 + m\cos\omega_m t)\cos\omega_0 t\,, \tag{4.6}$$

где ω_m – частота модуляции, m – глубина модуляции, ω_0 – несущая частота, то есть частота электромагнитной волны. Частотный спектр $S(\omega)$ сигнала (4.6) состоит из суммы трех гармоник:

$$S(\omega) = a_0\, \delta(\omega - \omega_0) + \frac{a_0 m}{2}\, \delta(\omega - \omega_m) + \frac{a_0 m}{2}\, \delta(\omega + \omega_m)\,. \tag{4.7}$$

При суперпозиции эквидистантных гармоник одинаковой амплитуды a_0 спектр сигнала $S(\omega)$ является дискретным. Если начальные фазы гармоник равны нулю, спектр $S(\omega)$ можно представить следующей суммой:

$$S(\omega) = a_0 \sum_{n=0}^{N-1} \delta(\omega - \omega_n)\,, \tag{4.8}$$

где $\omega_n = \omega_1 + \Omega n$, – частота n-ой гармоники ($n = 0, 1, ..., N-1$), а Ω – частотный интервал между двумя соседними гармониками. Полоса частот $\Delta\omega$, которую занимает спектр $S(\omega)$, и центральная частота ω_0 этой полосы равны:

$$\Delta\omega = \Omega(N-1)\,,\ \omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega/2\,. \tag{4.9}$$

Если полоса частот узкая, то есть имеет место неравенство:

$$\Delta\omega << \omega_0 , \tag{4.10}$$

сигнал $\xi(t)$, который формируется при суммировании N эквидистантных гармоник, можно представить в виде квазигармонического сигнала:

$$\xi(t) = A(t)\cos\omega_0 t .^{1} \tag{4.11}$$

Огибающая сигнала $A(t)$ меняется во времени в соответствии с выражением:

$$A(t) = a_0 \frac{\sin(N\Omega t/2)}{\sin(\Omega t/2)} . \tag{4.12}$$

Из анализа (4.12) следует, что при $t_s = \dfrac{2\pi}{\Omega}s$ $(s = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \ldots)$

$$A(t_s) = Na_0(-1)^s . \tag{4.13}$$

В эти моменты времени, повторяющиеся периодически, все гармоники суммируются в фазе, и модуль огибающей $A(t = t_s)$ в N раз больше амплитуды a_0 отдельной гармоники. При $t_s = 2\pi s/\Omega$ фазы гармоник оказываются сдвинутыми на $2\pi s$ вследствие того, что интервал частот Ω между ними является постоянным.

В моменты времени, определяемые условием:

$$t_q = \frac{2\pi}{N\Omega}q , \tag{4.14}$$

где q – целое не кратное N, то есть $q = \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \ldots, \pm(N-1), \pm(N+1), \ldots, \pm(2N-1), \pm(2N+2), \ldots$, амплитуда огибающей обращается в ноль: $A(t_q) = 0$.

Если число суммируемых гармоник стремится к бесконечности $(N \to \infty)$ так, что частотный интервал между ними стремится к нолю ($\Omega \to 0$), а полоса частот $\Delta\omega$ остается постоянной, то спектр сигнала $S(\omega)$ становится сплошным. В этом случае условие (4.14) можно переписать в виде:

---

[1] К квазигармоническим относятся сигналы, у которых амплитуда $A(t)$ медленно меняется по сравнению с гармонической функцией на центральной частоте ω_0: $\dfrac{\partial A(t)}{\partial t}\dfrac{2\pi}{\omega_0} << A(t)$.

$$t_q = \frac{2\pi}{\Delta\omega} q \quad (q = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots). \tag{4.15}$$

В сигнале со сплошным спектром существует единственный момент времени $t = 0$, при котором у бесконечного множества гармоник совпадают фазы, и амплитуда его огибающей достигает глобального максимума.

Теорема о ширине частотной полосы

Из условия (4.15) можно оценить длительность сигнала с шириной спектра $\Delta\omega$. Если за длительность сигнала Δt принять величину, равную половине интервала, содержащего главный максимум и ограниченного двумя нулями огибающей $A(t)$ при t_{+1} и при t_{-1}, то согласно (4.15):

$$\Delta t = 2\pi / \Delta\omega \tag{4.16}$$

Отсюда следует соотношение между длительностью сигнала Δt и шириной его частотного спектра $\Delta\omega$, называемое теоремой о ширине частотной полосы:

$$\Delta t \cdot \Delta\omega \geq 2\pi. \tag{4.17}$$

Здесь знак равенства имеет место, если при $t = 0$ у всех гармоник фазы совпадают. В этом случае сигнал $\xi(t)$ называется спектрально ограниченным. Знак неравенства имеет место, когда фазы гармоник не совпадают между собой при $t = 0$. Теорема о ширине частотной полосы (4.17) справедлива для периодических и уединенных сигналов произвольной формы. Теорема позволяет просто оценить ширину спектра $\Delta\omega$ по длительности импульса и, наоборот, по ширине спектра оценить длительность импульса.

Спектр периодического сигнала

Сигнал $\xi(t)$ является периодическим, если выполняется условие:

$$\xi(t) = \xi(t + T), \tag{4.18}$$

где T – период сигнала. Физически реальные сигналы описываются функциями времени, которые удовлетворяют условиям Дирихле, то есть являются ограниченными, кусочно-непрерывными и имеют конечное число разрывов на периоде T. Поэтому сигнал $\xi(t)$ можно представить в виде суммы гармоник Фурье:

$$\xi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t). \tag{4.19}$$

Представление $\xi(t)$ в виде разложения в ряд Фурье означает, что спектр $S(\omega)$ периодического сигнала является дискретным (или линейчатым), поскольку он содержит только дискретный набор частот ω_n. Частоты спектра эквидистантны, интервал Ω между ними обратно пропорционален периоду сигнала T:

$$\Omega = 2\pi / T\,. \tag{4.20}$$

Частоты дискретного спектра Фурье равны:

$$\omega_n = n\Omega = \frac{2\pi}{T} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots . \tag{4.21}$$

Амплитуды гармоник Фурье вычисляются следующим образом:

$$a_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{+T/2} \xi(t) \cos \omega_n t \, dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int\limits_{-T/2}^{+T/2} \xi(t) \sin \omega_n t \, dt\,. \tag{4.22}$$

Для вычислений более удобна комплексная запись ряда Фурье:

$$\xi(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n \, e^{i\omega_n t}\,, \text{ где } d_n = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{+T/2} \xi(t) \, e^{-i\omega_n t} dt\,. \tag{4.23}$$

Дискретный спектр сигнала как сумма символических δ-функций Дирака записывается в виде:

$$S(\omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} d_n \, \delta(\omega - \omega_n)\,. \tag{4.24}$$

Коэффициенты разложения d_n являются комплексными; они связаны с амплитудами гармоник a_n и b_n простыми соотношениями:

$$a_n = d_n + d_{-n}, \quad b_n = i(d_n - d_{-n})\,. \tag{4.25}$$

Реальный сигнал выражается действительной функцией $\xi(t)$. Поэтому амплитуды a_n и b_n – действительные числа, коэффициенты разложения d_n удовлетворяют условию[2] $d_n = d_{-n}^*$, и справедливы следующие соотношения:

$$a_n = 2\,\mathrm{Re}\, d_n, \quad b_n = -2\,\mathrm{Im}\, d_n\,. \tag{4.26}$$

Если сигнал $\xi(t)$ является симметричным относительно начала отсчета $t = 0$, то $\mathrm{Im}\, d_n = 0$ и амплитуды синусоидальных компонент

---

[2] Символ * означает комплексное сопряжение.

спектра $b_n = 0$. Если периодический сигнал $\xi(t)$ выражается антисимметричной функцией, то $\mathrm{Re}\, d_n = 0$ и амплитуды $a_n = 0$.

Размерность амплитуд a_n, b_n и коэффициентов разложения d_n совпадает с размерностью сигнала $\xi(t)$ и определяется физической природой волны.

Спектр одиночного импульса

Одиночный импульс $\xi(t)$ имеет сплошной спектр $S(\omega)$, в котором частота ω меняется непрерывно. Это соответствует представлению функции $\xi(t)$ в виде интеграла Фурье:

$$\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega . \tag{4.27}$$

Спектр $S(\omega)$ определяется выражением:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \xi(t)\, e^{-i\omega t} dt . \tag{4.28}$$

Спектр $S(\omega)$ является комплексной функцией частоты ω.

Под спектральной плотностью энергии импульса $G(\omega)$ понимают энергию, которую содержит непрерывное множество гармоник в единичной полосе частот, взятой на частоте ω. Величина $G(\omega)$ определяется выражением[3]:

$$G(\omega) = 2\pi \left| S(\omega) \right|^2 . \tag{4.29}$$

Полная энергия импульса W равна сумме $G(\omega)$ по всем частотам ω и, следовательно, вычисляется по формуле:

$$W = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(\omega)\, d\omega . \tag{4.30}$$

Одновременно, полная энергия W является интегралом по времени от мощности импульса, которая пропорциональна $\left|\xi(t)\right|^2$:

[3] Формула (4.29) записана с точностью до размерного множителя, который зависит от физической природы сигнала.

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} |\xi(t)|^2 \, dt \, . \tag{4.31}$$

Выражения (4.30) и (4.31) соответствуют теореме Планшереля для разложения Фурье.

На основе (4.30) и (4.31) можно дать энергетическое определение длительности импульса Δt_W и ширины его спектра $\Delta\omega_W$. Энергетическая длительность Δt_W – это время, за которое проходит заданная часть ε энергии импульса:

$$\int_{-\Delta t_W/2}^{+\Delta t_W/2} |\xi(t)|^2 \, dt = \varepsilon W \, . \tag{4.32}$$

Аналогично, энергетическая ширина спектра $\Delta\omega_W$ – это полоса частот, в которой содержится заданная часть ε энергии импульса:

$$\int_{-\Delta\omega_W}^{+\Delta\omega_W} G(\omega) \, d\omega = \varepsilon W \, . \tag{4.33}$$

Параметр $\varepsilon < 1$, и обычно выбирается $\varepsilon = 0{,}8 - 0{,}9$. Для длительности импульса Δt_W и ширины его спектра $\Delta\omega_W$, определенных по энергии, теорема о ширине частотной полосы принимает вид:

$$\Delta t_W \cdot \Delta\omega_W = C \, , \tag{4.34}$$

где величина коэффициента C зависит от формы импульса $\xi(t)$. Например, при неизменной длительности Δt_W с возрастанием крутизны фронта импульса увеличивается коэффициент C и, следовательно, ширина частотной полосы $\Delta\omega_W$ спектра импульса.

Свойства спектров Фурье

(а) Линейность. Спектр $S_3(\omega)$ для линейной формы двух (или более) сигналов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ имеет вид такой же линейной формы, то есть, если $\xi_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$, $\xi_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$ и $\xi_3(t) = \alpha_1\xi_1(t) + \alpha_2\xi_2(t)$, то

$$S_3(\omega) = \alpha_1 S_1(\omega) + \alpha_2 S_2(\omega) \, . \tag{4.35}$$

(б) Теорема запаздывания. Если $\xi(t) \leftrightarrow S(\omega)$, то

$$\xi(t - t_0) \leftrightarrow S(\omega) \, e^{-i\omega t_0} \, . \tag{4.36}$$

(в) Теорема смещения. Если $\xi(t) \leftrightarrow S(\omega)$, то

$$\xi(t)\, e^{i\omega_0 t} \leftrightarrow S(\omega - \omega_0)\,. \tag{4.37}$$

(г) Теорема о свертке в спектральном пространстве. Спектр $S_3(\omega)$ сигнала $\xi_3(t)$, представимого произведением двух функций $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, равен свертке спектров $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$ этих сомножителей, то есть если $\xi_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$, $\xi_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$ и $\xi_3(t) = \xi_1(t) \cdot \xi_2(t)$, то

$$S_3(\omega) = S_1(\omega) \otimes S_2^*(\omega)\,, \tag{4.38}$$

где $\otimes$ – операция свертки, которая определяется следующим образом

$$S_3(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_1(\zeta) S_2^*(\omega - \zeta)\, d\zeta\,. \tag{4.39}$$

(д) Теорема о свертке во времени. Если $\xi_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$, $\xi_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$ и $S_3(\omega) = S_1(\omega) \cdot S_2(\omega)$, то

$$\xi_3(t) = \xi_1(t) \otimes \xi_2^*(t)\,. \tag{4.40}$$

Примеры решения задач

Пример 4.1. Найти спектр сигнала, представляющего собой периодическую последовательность импульсов прямоугольной формы длительностью τ и амплитуды a. Период следования импульсов T. Построить амплитудный спектр сигнала для значений его длительности $\tau = 0{,}5T$ и $\tau = 0{,}1T$. Найти спектр одиночного прямоугольного импульса.

Решение. Сигнал $\xi(t)$, представляющий собой бесконечную периодическую последовательность прямоугольных импульсов, можно разложить в ряд Фурье:

$$\xi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t)\,,$$

где $\Omega = 2\pi/T$ и T – период последовательности. Пусть нулевой момент времени совпадает с серединой импульса, тогда $\xi(t)$ – четная функция. Найдем значения коэффициентов.

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} \xi(t)\, dt = \frac{1}{T} \int\limits_{-\tau/2}^{\tau/2} a\, dt = \frac{a\tau}{T}\,,$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\xi(t)\cos(n\Omega t)dt = \frac{2a}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos(n\Omega t)dt = \frac{2a}{Tn\Omega}\sin(n\Omega t)\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} =$$

$$= \frac{a}{\pi n}2\sin\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right) = \frac{2a\tau}{T}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n\tau}{T}\right),$$

где $\operatorname{sinc}(x) \equiv \sin(x)/x$.

Ясно, что $b_n = 0$ при любом n, так как при вычислении этих коэффициентов производится интегрирование нечетной функции в симметричных пределах. Из полученных выражений видно, что коэффициенты ряда Фурье знакопеременны, убывают с увеличением n и могут периодически обращаться в ноль.

Пусть период последовательности импульсов T в M раз больше длительности импульса τ: $T = M\tau$. Видно, что $a_n = 0$, если $\frac{\pi n\tau}{T} = \pi j$ ($j = 1, 2, 3, \ldots$), то есть $n = Mj$ (полученное условие выполняется при рациональном M). Для заданной последовательности $\tau = 0{,}5T$ ($M = 2$) в ноль обращаются все четные коэффициенты a_n. Для последовательности с $\tau = 0{,}1T$ ($M = 10$) нулевыми коэффициентами являются десятый, двадцатый, тридцатый и так далее. Значения коэффициентов для заданных последовательностей вычисляются по формулам $a_n = a\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ и $a_n = \frac{a}{5}\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi n}{10}\right)$. В случае последовательности с $\tau = 0{,}5T$ абсолютное значение n-го нечетного коэффициента в n раз меньше первого коэффициента.

Спектр одиночного прямоугольного импульса $\eta(t)$, представляющего собой непериодическую функцию, находим при помощи интеграла Фурье:

$$\eta(t) = \int_0^\infty A(\omega)\sin(\omega t)d\omega + \int_0^\infty B(\omega)\cos(\omega t)d\omega .$$

Выражения для функций $A(\omega)$ и $B(\omega)$, определяющих спектр импульса, имеют вид

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t)\sin(\omega t)dt$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t)\cos(\omega t)dt\,.$$

Пусть по-прежнему нулевой момент времени совпадает с серединой импульса. В этом случае $A(\omega) = 0$, а функция $B(\omega)$ имеет вид

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta(t)\cos(\omega t)dt=\frac{a}{\pi}\int_{-\tau/2}^{\tau/2}\cos(\omega t)dt=\frac{a}{\pi\omega}\sin(\omega t)\Big|_{-\tau/2}^{\tau/2}=\frac{a\tau}{\pi}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right).$$

Функция $B(\omega)$ обращается в ноль в точках $2\pi m/\tau$ (m – целое число). Видно, что ширина спектра $\Delta\omega$, определенная как половина расстояния между ближайшими нулями функции $B(\omega)$, обратно пропорциональна длительности прямоугольного импульса $\eta(t)$.

Задания для самостоятельной работы[4]

4.2. (*1*) Используя комплексную форму записи, покажите, что суперпозиция двух гармонических бегущих волн, распространяющихся в положительном направлении оси z и имеющих одинаковые частоты, представляет собой бегущую волну. Запишите аналитический вид суммарной волны и найдите связь ее амплитуды и фазы с амплитудами исходных волн.

Литература

Л.Н. Капцов, Физика элементов ЭВМ, М.: изд-во МГУ, 1983, гл. 3, §§ 2, 3, 14, 15.

4.3. (*1*) В пределах интервала длительностью τ сигнал представляет собой гармоническое колебание с частотой ν_0 и постоянной амплитудой, вне этого интервала сигнал равен нулю. Найти спектр этого сигнала непосредственными вычислениями, а также используя свойства преобразования Фурье.

4.4. (*2*) Определить спектр прямоугольного импульса $y(t)=\begin{cases}a, & |t|<\tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$.

Из энергетических соотношений оценить ширину спектра $\Delta\omega_W$ для импульсов длительностью $\tau = 1$ мс и $\tau = 1$ мкс. Для этого определить частотный интервал, которому соответствует ε – некоторая наперед

[4] В скобках указана степень сложности задания, которая оценивается в баллах от 1 (наименьшая сложность) до 3 (наибольшая сложность).

заданная близкая к единице часть полной энергии сигнала (значение ε выбирается самостоятельно). Ширину этого интервала считать шириной спектра. Представить ширину спектра $\Delta\omega_W$ и Δf_W в размерных единицах для обеих длительностей импульса.

4.5. (*2*) Найти спектр пилообразного импульса $y(t) = \begin{cases} a\left(1 - \dfrac{t}{\tau}\right), & 0 \le t \le \tau \\ 0, & t < 0 \text{ и } t > \tau \end{cases}$.

Оценить ширину амплитудного спектра для импульсов длительностью τ = 1 мс и τ = 1 мкс и сравнить ее с шириной для прямоугольных импульсов таких же длительностей τ. Найти спектр периодической последовательности пилообразных импульсов. На периоде T форма сигнала задается соотношением $y(t) = a\left(1 - \dfrac{t}{T}\right)$.

Представить сигналы и спектры графически.

4.6. (*2*) Найти спектр импульса $y(t) = \begin{cases} a\exp(-\delta t), & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$. Рассмотреть характер изменения импульса и спектра при $\delta \to 0$. Построить графики $y(t)$ и $S(\omega)$.

4.7. (*2*) Для излучения атома используется модель в виде цуга затухающих колебаний, задаваемого функцией $\xi(t) = \begin{cases} a\exp(-t/\tau_0)\sin\Omega t, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, где $\tau_0\Omega >> 1$. Здесь Ω – частота излучения, τ_0 – радиационное время жизни атома.

Найти спектр излучения атома $S(\omega)$. Получить лоренцову форму линии излучения $S(\omega)$ атома в окрестности частоты излучения Ω, используя условие $\tau_0\Omega >> 1$ и полагая, что $\omega - \Omega << \omega, \Omega$. Построить графики излучения $\xi(t)$ и его спектра $S(\omega)$ при $\tau_0\Omega$ = 3, 10, 100. Рассмотреть характер изменения спектра при $\tau_0 \to \infty$. Оценить радиационное уширение спектра излучения He-Ne лазера, если радиационное время жизни атома $\tau_0 \approx 10^{-8}$ с.

4.8. (*2*) Найти спектр сигнала $y(t)=\begin{cases} a\sin(\Omega t+\varphi), & t_1 \le t \le t_2 \\ 0, & t<t_1 \text{ и } t>t_2 \end{cases}$ непосредственным вычислением и с использованием свойств преобразования Фурье. Отдельно рассмотреть случаи φ = 0 и $\Omega=\frac{2\pi}{t_2-t_1}\cdot n$, где $n=1,2,10,\ n\to\infty$. Для этих случаев построить графики $S(\omega)$.

4.9. (*2*) Найти спектр периодической последовательности радиоимпульсов длительностью τ непосредственным вычислением и с использованием свойств преобразования Фурье. На одном периоде T импульс задается функцией $\xi(t)=\begin{cases} a\exp i(\omega t+\varphi), & 0\le t\le\tau \\ 0, & \tau<t<T \end{cases}$. Считать, что $\omega T \gg 1$. Построить амплитудный спектр для импульсов длительностью $\tau = 0{,}5T$ и $\tau = 0{,}1T$. Построить спектр одиночного радиоимпульса.

4.10. (*1*) Волновой пакет состоит из двух составляющих с длинами волн λ_0 и $\lambda_0+\Delta\lambda$, причем $\Delta\lambda \ll \lambda_0$. Покажите, что число длин волн, укладывающихся между двумя нулями огибающей, приблизительно равно $\lambda_0/\Delta\lambda$.

4.11. (*1*) Представить графически следующие сигналы и спектры этих сигналов:

$$\xi_1(t)=\begin{cases} a/2, & -T/2<t<0 \\ -a/2, & 0<t<T/2 \end{cases}, \quad \xi_1(t)=\xi_1(t+T);$$

$$\xi_2(t)=\xi_1\left(t-\frac{T}{4}\right); \quad \xi_3(t)=\xi_2(t)+\frac{a}{2}.$$

4.12. (*2*) Вычислить и представить в одном масштабе спектры периодической последовательности треугольных импульсов

$$\xi(t)=\begin{cases} \frac{2a}{\tau}\left(t+\frac{\tau}{2}\right), & -\frac{\tau}{2}<t<0 \\ -\frac{2a}{\tau}\left(t-\frac{\tau}{2}\right), & 0<t<\frac{\tau}{2} \\ 0, & -T/2<t<-\tau/2 \text{ и } \tau/2<t<T/2 \end{cases}, \quad \xi(t)=\xi(t+T)$$

для различных соотношений между длительностью импульса и периодом следования импульсов: $\tau = T/2$, $T/4$, $T/16$. Вычислить и построить спектр одиночного треугольного импульса.

4.13. (*2*) Вычислить и представить графически сигнал, имеющий спектр

$$S(\omega) = \begin{cases} a, & \omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2} \le \omega \le \omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2} \\ 0, & \omega < \omega_0 - \dfrac{\Delta\omega}{2} \text{ и } \omega > \omega_0 + \dfrac{\Delta\omega}{2} \end{cases}; \quad \Delta\omega << \omega_0 .$$

Определить длительность импульса τ. Вычислить относительную энергию, переносимую сигналом за время τ.

4.14. (*2*) Вычислить и сравнить спектры следующих прямоугольных импульсов:

$$\xi_1(t) = \begin{cases} a, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}, \quad \xi_2(t) = \xi_1(t - \frac{\tau}{2}) , \quad \xi_3(t) = \xi_1(t - t_0) .$$

Изобразить мнимые и действительные части спектров этих импульсов, а также спектральные плотности энергии.

4.15. (*2*) Вычислить спектр сигнала $\xi(t) = a\dfrac{t}{t_0}\exp(-\dfrac{\pi t^2}{t_0^2})$. Представить графически сигнал $\xi(t)$ в зависимости от параметра t_0, характеризующего его длительность, и спектр $S(\omega)$ сигнала в зависимости от параметра t_0^{-1}, характеризующего ширину его спектра. Проанализировать и построить в том же масштабе сигнал и спектр для импульсов при увеличении и уменьшении параметра t_0 в два и десять раз.

4.16. (*2*) В современной лазерной физике получены световые импульсы фемтосекундной длительности, то есть импульсы, состоящие из нескольких периодов оптических колебаний. Рассчитать спектр импульса длительностью в n периодов оптических колебаний при $\lambda = 600$ нм. Построить графики зависимостей спектральной плотности энергии от частоты для $n = 1, 2, 3, 10$. Рассмотреть случаи, когда импульс начинается с нулевой и максимальной амплитуд поля, и объяснить соответствующие изменения спектра.

4.17. (*2*) Вычислить спектр сигнала $\xi(t) = a\frac{t}{t_1}\exp(-\frac{\pi t^2}{t_0^2})$. Представить графически сигнал $\xi(t)$ в зависимости от параметра t_0, и спектр $S(\omega)$ сигнала в зависимости от переменной t_0^{-1} , полагая $t_1 = t_0, 0{,}1t_0, 10t_0$. Оценить каким-либо способом ширину спектра и проанализировать ее изменение при варьировании параметра t_1 .

§5. Спектральный анализ на компьютере

Краткие теоретические сведения

При вычислениях на компьютере сигнал $\xi(t)$, который зависит от непрерывно меняющегося времени t, заменяется функцией дискретного аргумента $\xi_h(j)$, где h – шаг дискретизации времени, $j=1,\ 2,\ ...,\ N$ – номер узла, N – число узлов на расчетной сетке. Сигналу $\xi_h(j)$, как функции дискретного аргумента j, можно сопоставить дискретный частотный спектр $S_h(n)$ ($n=1,\ 2,\ ...,\ N$ – номер гармоники). Между сигналом $\xi_h(j)$ и его спектром $S_h(n)$ существует взаимно однозначная связь:

$$\xi_h(j) \leftrightarrow S_h(n), \quad j,n=1,2,...,N\ . \tag{5.1}$$

Принято называть $\xi_h(j)$ оригиналом, а $S_h(n)$ образом дискретного преобразования Фурье.

Формирование массивов чисел $\xi_h(j)$ и $S_h(n)$ конечной размерности N необходимо для выполнения операций на компьютере. Получение массива $\xi_h(j)$ путем наложение сетки с шагом h на область непрерывного изменения переменной t и переход от сигнала $\xi(t)$, непрерывно меняющегося во времени, к функции дискретного аргумента $\xi_h(j)$ приводит к периодизации спектра $S_h(\omega)$ исходного сигнала. Если перейти от круговой частоты ω к частоте $\nu=\omega/2\pi$, измеряемой в герцах, то условие периодичности спектра $S_h(\nu)$ записывается в виде:

$$S_h(\nu)=S_h(\nu+q/h), \quad q=\pm 1,\ \pm 2,\ \dots . \tag{5.2}$$

Частота периодизации спектра равна $1/h$, то есть величине, обратной шагу дискретизации сигнала h. Для дискретного спектра $S_h(n)$ условие периодичности (5.2) выражается следующим образом:

$$S_h(n)=S_h(n+qN), \quad q=\pm 1,\ \pm 2,\ \dots, \tag{5.3}$$

где N – число гармоник, укладывающихся на одном периоде спектра.

Массив гармоник, то есть дискретный спектр, $S_h(n)$ соответствует согласно §4 периодическому сигналу $\xi(t)=\xi(t+sT)$ $(s=\pm 1,\ \pm 2,\ \dots)$, что при переходе к дискретному времени означает следующее:

$$\xi_h(j) = \xi_h(j + sN), \quad s = \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{5.4}$$

Число отсчетов дискретного времени на периоде сигнала равно N, и, следовательно, выполняется соотношение:

$$T = Nh. \tag{5.5}$$

Таким образом, дискретное преобразование Фурье устанавливает взаимно однозначную связь (5.1) между периодической функцией дискретного аргумента $\xi_h(j)$ и периодическим дискретным спектром $S_h(n)$. При этом число отчетов дискретного сигнала $\xi_h(j)$ на его периоде T и число гармоник дискретного спектра $S_h(n)$ на его периоде $1/h$ одинаково и равно N.

Формулы дискретного преобразования Фурье имеют следующий вид.

Вычисление спектра $S_h(n)$ по сигналу $\xi_h(j)$ – прямое преобразование:

$$S_h(n) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \xi_h(j)\, W_N^{nj}, \quad n = 1, 2, \ldots, N. \tag{5.6}$$

Вычисление сигнала $\xi_h(j)$ по спектру $S_h(n)$ – обратное преобразование:

$$\xi_h(j) = \sum_{n=1}^{N} S_h(n)\, W_N^{-nj}, \quad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{5.7}$$

где $W_N = \exp\left(i\frac{2\pi}{N}\right)$.

Комплексные амплитуды гармоник W_N^{nj} обладают свойствами ортогональности, как для разных частот n и n' в пространстве переменной j, так и для разных отсчетов j и j' в пространстве частот n:

$$\begin{gathered} \sum_{j=1}^{N} W_N^{-nj} W_N^{n'j} = \left\{\begin{matrix} N \text{ при } n = n' \\ 0 \text{ при } n \neq n' \end{matrix}\right\}, \\ \sum_{n=1}^{N} W_N^{-nj} W_N^{nj'} = \left\{\begin{matrix} N \text{ при } j = j' \\ 0 \text{ при } j \neq j' \end{matrix}\right\}. \end{gathered} \tag{5.8}$$

Для дискретного преобразования Фурье справедливы свойства, аналогичные свойствам (4.35)–(4.40) для непрерывного преобразования. Если оригинал $\xi_h(j)$ и его образ $S_h(n)$ связаны между собой дискретным преобразованием Фурье (5.1), то имеют место следующие утверждения:

(а) Линейность. Если $\xi_h^{(1)}(j) \leftrightarrow S_h^{(1)}(n)$ и $\xi_h^{(2)}(j) \leftrightarrow S_h^{(2)}(n)$, то

$$\alpha^{(1)}\,\xi_h^{(1)}(j) + \alpha^{(2)}\,\xi_h^{(2)}(j) \leftrightarrow \alpha^{(1)}\,S_h^{(1)}(n) + \alpha^{(2)}\,S_h^{(2)}(n)\,. \qquad (5.9)$$

(б) Теорема запаздывания. Если $\xi_h(j) \leftrightarrow S_h(n)$, то

$$\xi_h(j-k) \leftrightarrow W_N^{-nk}\,S_h(n)\,. \qquad (5.10)$$

(в) Теорема смещения. Если $\xi_h(j) \leftrightarrow S_h(n)$, то

$$\xi_h(j) W_N^{mj} \leftrightarrow S_h(n-m)\,. \qquad (5.11)$$

(г) Теоремы о свертке. Если $\xi_h^{(1)}(j) \leftrightarrow S_h^{(1)}(n)$ и $\xi_h^{(2)}(j) \leftrightarrow S_h^{(2)}(n)$, то

$$\xi_h^{(1)}(j) \otimes \xi_h^{(2)}(j) \leftrightarrow S_h^{(1)}(n) \cdot S_h^{(2)}(n) \qquad (5.12)$$

$$\text{или } \xi_h^{(1)}(j) \cdot \xi_h^{(2)}(j) \leftrightarrow S_h^{(1)}(n) \otimes S_h^{(2)}(n)\,, \qquad (5.13)$$

где $\xi_h^{(1)}(j) \otimes \xi_h^{(2)}(j) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N} \xi_h^{(1)}(k)\,\xi_h^{(2)}(j-k)$ – свертка в дискретном пространстве.

Частота Найквиста

Периодизацию спектра $S_h(\nu)$ при дискретизации времени в сигнале $\xi(t)$ можно представить как результат суммирования бесконечного множества спектров $S_h(\nu \pm q/h)$, сдвигаемых на $q = \pm 1, \pm 2, \ldots$ периодов, равных $1/h$:

$$S_h(\nu) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S_h(\nu + q/h)\ . \qquad (5.14)$$

Из этого представления следует, что в спектре исходного сигнала $\xi(t)$ частота ν должна быть ограниченной, чтобы не происходило перекрытия (наложения) гармоник на «хвостах» спектров при суммировании по (5.14). Верхняя граница частотной полосы, при которой не происходит наложения частот при периодизации спектра в дискретном преобразовании Фурье, называется частотой Найквиста ν_{N}:

$$\nu_{\mathrm{N}} = 1/2h\,, \qquad (5.15)$$

где h – шаг дискретизации времени в сигнале $\xi(t)$ при переходе к функции дискретного аргумента $\xi_h(j)$.

Если максимальная частота $\nu_{\max}$ в спектре $S(\nu)$ исходного сигнала меньше частоты Найквиста ν_N, то непрерывный сигнал $\xi(t)$ полностью восстанавливается по дискретному спектру $S_h(n)$, содержащему конечное число N гармоник. Это означает, что конечный ряд Фурье, вычисленный для непрерывного множества значений времени t, совпадает с сигналом $\xi(t)$. Спектр $S_h(n)$ однозначно определяет дискретные значения $\xi_h(j)$ сигнала, и восстановление непрерывного сигнала $\xi(t)$ может быть осуществлено по интерполяционной формуле Котельникова–Шеннона:

$$\xi(t) = \sum \xi_h(j) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{h}(t-hj)\right)}{\frac{\pi}{h}(t-hj)} . \qquad (5.16)$$

Если максимальная частота $\nu_{\max}$ в спектре $S(\nu)$ исходного сигнала больше частоты Найквиста ν_N, то значения сигнала, полученного по дискретному спектру $S_h(n)$, совпадают с его величиной $\xi(t)$ только в моменты времени $t = hj$, которые являются узлами наложенной сетки. Тогда как, при других значениях времени $t \neq hj$, не совпадающих с узлами, сигнал, получаемый по спектру $S_h(n)$, отличается от $\xi(t)$. Эти отклонения, называемые осцилляциями Гиббса, возникают вследствие наложения частот при периодизации спектра в дискретном преобразовании Фурье. Если спектр $S(\nu)$ исходного сигнала определен на бесконечной оси частот ($-\infty < \nu < +\infty$), то частоту Найквиста ν_N выбирают из условия:

$$\left|S(\nu_N)\right| << \max\left|S(\nu)\right| . \qquad (5.17)$$

Неизбежная периодизация сигнала при дискретном преобразовании Фурье равносильна суммированию бесконечного множества его значений $\xi(t+sT)$, сдвинутых по времени на $s = \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$ периодов T:

$$\xi(t) = \sum_{s=-\infty}^{+\infty} \xi(t+sT) . \qquad (5.18)$$

Отсюда следует, что на границах периода T сигнал должен обращаться в ноль, чтобы его «хвосты» не накладывались друг на друга при периодизации в дискретном преобразовании Фурье. В противном случае, возникают погрешности, вызванные периодизацией сигнала. Если сигнал

$\xi(t)$ определен на бесконечной оси времени ($-\infty < t < +\infty$), то период T выбирается из условия:

$$|\xi(\pm T/2)| << \max|\xi(t)| . \qquad (5.19)$$

Увеличение частоты Найквиста ν_N путем уменьшения шага дискретизации времени h и одновременно увеличение периода T сигнала $\xi(t)$ позволяют минимизировать погрешность, возникающую при вычислении спектров Фурье на компьютере. Однако, такая минимизация погрешности неизбежно влечет увеличение вычислительных затрат, так как возрастает размерность массивов, равная $N = T/h$. Качественный анализ сигналов и их спектров на основе физических закономерностей преобразования Фурье позволяет оптимизировать вычислительные затраты.

Пример решения задачи

Пример 5.1. Оценить шаг дискретизации h и время регистрации T сигнала $\xi(t) = a\exp\left(-t^2/\tau_0^2\right)$ для вычисления его спектра при помощи дискретного преобразования Фурье. Определить число точек при дискретизации. Оценить частоту Найквиста ν_N.

Решение. Используя формулу преобразования Фурье (см. §4), можно показать, что спектр сигнала с точностью до множителя имеет вид:

$$S(\omega) \sim \exp\left(-\omega^2\tau_0^2/4\right) \text{ или } S(\nu) \sim \exp(-\pi^2\nu^2\tau_0^2) \text{ , где } \omega = 2\pi\nu .$$

Видно, что функция, определяющая спектр сигнала, убывает в e раз при частоте $\nu_e = 1/(\pi\tau_0)$.

Частота Найквиста ν_N должна быть больше максимальной частоты в спектре сигнала. Строго говоря, для приведенного спектра не существует граничной (максимальной) частоты. В связи с этим необходимо использовать некоторое приближение. Видно, что функция, определяющая спектр, быстро убывает с увеличением частоты. Определим значение частоты, при котором функция $S(\nu)$ убывает, например, на десять порядков по сравнению с максимальным значением $S(\nu = 0)$, которое достигается при $\nu = 0$. Ясно, что такую частоту можно приближенно считать границей спектра, то есть максимальной частой ν_{max}. Итак, согласно принятому предположению имеем: $\exp(-\pi^2\nu_{max}^2\tau_0^2) \approx 10^{-10}$. Отсюда, следует

$\pi^2\nu_{max}^2\tau_0^2 \approx 23$ и $\nu_{max} \approx 1.5/\tau_0$. Выберем частоту Найквиста ν_N несколько больше полученной оценки для максимальной частоты ν_{max}, а именно, положим: $\nu_N = 2/\tau_0$. Отсюда, в соответствии с (5.15) получаем $1/2h \approx 2/\tau_0$, и, следовательно, шаг дискретизации сигнала равен $h \approx \tau_0/4$. Заметим, что при таком шаге h на временной интервал τ_0, на котором исходный сигнал убывает в e раз, приходится всего четыре узла дискретизации.

Применение дискретного преобразования Фурье предполагает периодизацию сигнала. Ясно, что время регистрации сигнала должно совпадать с предполагаемым периодом *T*, поскольку при $t > T$ периодизированный сигнал не содержит новой информации. Таким образом, зарегистрировав сигнал на конечном временном отрезке *T*, мы сможем сформировать периодический сигнал путем бесконечного периодического продолжения измеренного фрагмента. Такого рода действие не представляет проблемы для сигналов конечной длительности. Однако, рассматриваемый сигнал таковым не является. По аналогии с вышеприведенным рассмотрением спектра, мы можем приближенно считать, что сигнал обращается в ноль при $|t| > t_{max}$. Для определения характерного временного интервала воспользуемся оценкой $\xi(t_{max}) = a\exp(-\frac{t_{max}^2}{\tau_0^2}) = a \cdot 10^{-10}$. Производя вычисления, получаем $t_{max} \approx 4.8\tau_0$. Время регистрации сигнала (период *T*) можно выбрать, исходя из соотношения $T/2 = 5\tau_0$ или $T = 10\tau_0$. Таким образом, полное число точек при дискретизации равно $N = T/h = 40$.

Задания для самостоятельной работы[1]

5.2. (*2*) Оценить шаг дискретизации h и время регистрации T сигнала для вычисления его спектра $S_h(n)$ при помощи дискретного преобразования Фурье. Определить размерность массивов N, то есть число точек отсчета на периоде T при дискретизации сигнала. Оценить частоту Найквиста ν_N.

---

[1] В скобках указана степень сложности задания, которая оценивается в баллах от 1 (наименьшая сложность) до 3 (наибольшая сложность).

Определить шаг h (в единицах измерения времени) и ширину спектра $\Delta\nu$ (в герцах). Изобразить графически сигналы $\xi(t)$ в зависимости от τ и их спектры $S(\nu)$ в зависимости от частоты ν, взятой в единицах, пропорциональных τ^{-1}, для следующих вариантов.

Вариант (а)

$$\xi(t) = a\exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right)\sin\Omega t\ ,\ \Omega/2\pi = 10^5\ \text{Гц},\ \tau_0 = 10^{-3}\ \text{с}.$$

Вариант (б)

$$\xi(t) = a\exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right) - a\exp\left(-\frac{t^2}{\tau_1^2}\right),\ \tau_0 = 10^{-4}\ \text{с},\ \tau_1 = 10^{-6}\ \text{с}.$$

Вариант (в)

$$\xi(t) = a\exp\left(-\frac{t}{\tau_0}\right)\sin\Omega t\ ,\ \Omega/2\pi = 1\ \text{МГц},\ \tau_0 = 10^{-3}\ \text{с}.$$

Вариант (г)

$$\xi(t) = a\frac{t}{\tau_0}\exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right),\ \tau_0 = 10^{-4}\ \text{с}.$$

Вариант (д)

$$\xi(t) = a\frac{t^2}{\tau_1^2}\exp\left(-\frac{t^2}{\tau_0^2}\right),\ \tau_0 = 10^{-3}\ \text{с},\ \tau_1 = 10^{-5}\ \text{с}.$$

5.3. (*2*) Найти сигнал $\xi(t)$, являющийся суперпозицией конечного числа N гармонических колебаний с эквидистантными частотами в полосе $\Delta\nu$. Определить и выразить через $\Delta\nu$ следующие величины: моменты времени, в которых сигнал обращается в ноль и период следования импульсов. Определить длительность центрального лепестка импульса, как интервал между соседними нолями, которому принадлежит максимум импульса. Найти относительную величину энергии, которая переносится центральным лепестком импульса. Изобразить $\xi(t)$ в зависимости от переменной, пропорциональной $\Delta\nu$ для случая $\Delta\nu$ = 1 МГц при N = 10 и 100.

5.4. (*3*) Вычислить спектр $S_h(n)$ сигнала $\xi(t)$ при помощи дискретного преобразования Фурье. Шаг дискретизации $h = T/N$. Восстановить по вычисленному спектру сигнал $\xi'(t)$ с шагом $h' = h/n$. Изобразить исходный

$\xi(t)$ и восстановленный $\xi'(t)$ сигналы в зависимости от τ, а также действительную и мнимую части и модуль спектра в зависимости от переменной, пропорциональной τ^{-1}. Рассмотреть случаи $N = 5, 11$ и $n = 2, 4$. Общее число точек при преобразовании $N_0 \geq 6N$.

Вариант (а)

прямоугольный импульс $\xi(t) = \begin{cases} a, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$.

Вариант (б)

треугольный импульс $\xi(t) = \begin{cases} \frac{2a}{\tau}(t + \frac{\tau}{2}), & -\tau/2 < t < 0 \\ -\frac{2a}{\tau}(t - \frac{\tau}{2}), & 0 < t < \tau/2 \\ 0, & t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2 \end{cases}$.

Вариант (в)

пилообразный импульс $\xi(t) = \begin{cases} \frac{2a}{\tau}t + a, & -\tau/2 < t < 0 \\ \frac{2a}{\tau}t - a, & 0 < t < \tau/2 \\ 0, & t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2 \end{cases}$.

Вариант (г)

супергауссовский импульс $\xi(t) = a\exp\left(-(2t/\tau)^{2m}\right)$, $m = 1, 2, 4, 8$.

5.5. (*2*) Количественно исследовать влияние формы импульса $\xi(t)$ на ширину спектра $S(\nu)$. За длительность импульса принять интервал, равный длительности эквивалентного прямоугольного импульса: $\Delta t = \int_{-\infty}^{\infty} |\xi(t)|^2 dt \Big/ \left(\max|\xi(t)|\right)^2$. За ширину спектра принять полосу частот, определяемую соотношением $\Delta\nu = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 d\nu \Big/ \left(\max|S(\nu)|\right)^2$. Исходя из принятых определений, найти величину численного коэффициента C в теореме о ширине частотной полосы: $\Delta t \Delta\nu = C$. Изобразить графически сигналы $\xi(t)$ в зависимости от τ и их спектры $S(\nu)$ в зависимости от частоты

ν, взятой в единицах, пропорциональных τ^{-1}. Решение некоторых вариантов задачи возможно аналитически, но, как правило, рекомендуется воспользоваться компьютером для вычисления дискретных спектров.

Получить и сравнить результаты для следующих импульсов.

Вариант (а)

прямоугольный импульс $\xi(t)=\begin{cases} a, & |t|<\tau/2 \\ 0, & |t|>\tau/2 \end{cases}$,

треугольный импульс $\xi(t)=\begin{cases} \dfrac{2a}{\tau}(t+\tau/2), & -\tau/2<t<0 \\ -\dfrac{2a}{\tau}(t-\tau/2), & 0<t<\tau/2 \\ 0, & t<-\tau/2 \text{ и } t>\tau/2 \end{cases}$;

гауссов импульс $\xi(t)=a\exp\left(-t^2/\tau^2\right)$.

Вариант (б)

прямоугольный импульс $\xi(t)=\begin{cases} a, & |t|<\tau/2 \\ 0, & |t|>\tau/2 \end{cases}$,

"косинусоидальный" импульс $\xi(t)=\begin{cases} a\cos(\pi t/\tau), & |t|<\tau/2 \\ 0, & |t|>\tau/2 \end{cases}$,

гауссов импульс $\xi(t)=a\exp\left(-t^2/\tau^2\right)$.

Вариант (в)

прямоугольный импульс $\xi(t)=\begin{cases} a, & |t|<\tau/2 \\ 0, & |t|>\tau/2 \end{cases}$,

"косинусоидальный" импульс $\xi(t)=\begin{cases} \dfrac{a}{2}\left(1+\cos(2\pi t/\tau)\right), & |t|<\tau/2 \\ 0, & |t|>\tau/2 \end{cases}$ и

гауссов импульс $\xi(t)=a\exp\left(-t^2/\tau^2\right)$.

Вариант (г)

прямоугольный импульс $\xi(t)=\begin{cases} a, & |t|<\tau/2 \\ 0, & |t|>\tau/2 \end{cases}$;

супергауссовский импульс $\xi(t)=a\exp\left(-(2t/\tau)^{2m}\right)$, m = 1, 2, 4, 8.

Вариант (д)

прямоугольный импульс $\xi(t)=\begin{cases} a, & |t|<\tau/2 \\ 0, & |t|>\tau/2 \end{cases}$,

трапециевидный импульс

$$\xi(t)=\begin{cases} \dfrac{a}{\alpha\tau}\left(t+\dfrac{\tau(1+\alpha)}{2}\right), & -\dfrac{\tau(1+\alpha)}{2}<t<-\dfrac{\tau(1-\alpha)}{2} \\ a, \ |t|<\tau(1-\alpha)/2 & \\ -\dfrac{a}{\alpha\tau}\left(t-\dfrac{\tau(1+\alpha)}{2}\right), & \dfrac{\tau(1-\alpha)}{2}<t<\dfrac{\tau(1+\alpha)}{2} \\ 0, \ t<-\tau(1+\alpha)/2 \text{ и } t>\tau(1+\alpha)/2 & \end{cases},$$

объяснить изменение коэффициента C при изменении параметра $0\le\alpha\le1$.

Вариант (е)

прямоугольный импульс $\xi(t)=\begin{cases} a, & |t|<\tau/2 \\ 0, & |t|>\tau/2 \end{cases}$,

знакопеременный импульс $\xi(t)=\begin{cases} a, & -\tau/2<t<0 \\ -a, & 0<t<\tau/2 \end{cases}$.

5.6. (*3*) Исследовать влияние формы импульса $\xi(t)$ на ширину спектра $S(\nu)$, исходя из энергетических соотношений. За длительность импульса Δt принять интервал, которому соответствует заданная доля ε всей энергии сигнала: $\varepsilon=\int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2}|\xi(t)|^2\,dt \Big/ \int_{-\infty}^{\infty}|\xi(t)|^2\,dt$. За ширину спектра $\Delta\nu$ принять полосу частот, которой соответствует та же доля ε в энергии спектра:

$\varepsilon = \int\limits_{-\Delta\nu}^{\Delta\nu} \left|S(\nu)\right|^2 d\nu \Bigg/ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left|S(\nu)\right|^2 d\nu$. Рассмотреть значения параметра $\varepsilon = 0{,}9$ и $\varepsilon = 0{,}95$. Исходя из принятых определений, найти величину численного коэффициента C в теореме о ширине частотной полосы: $\Delta t \Delta\nu = C$. Изобразить графически сигналы $\xi(t)$ в зависимости от τ и их спектры $S(\nu)$ в зависимости от частоты ν, взятой в единицах, пропорциональных τ^{-1}. Сравнить и объяснить результаты, полученные для следующих импульсов.

Вариант (а)

прямоугольный импульс $\xi(t) = \begin{cases} a, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$,

треугольный импульс $\xi(t) = \begin{cases} \dfrac{2a}{\tau}(t + \tau/2), & -\tau/2 < t < 0 \\ -\dfrac{2a}{\tau}(t - \tau/2), & 0 < t < \tau/2 \\ 0, & t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2 \end{cases}$,

гауссов импульс $\xi(t) = a \exp\left(-t^2/\tau^2\right)$.

Вариант (б)

прямоугольный импульс $\xi(t) = \begin{cases} a, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$,

супергауссовский импульс $\xi(t) = a \exp\left(-(2t/\tau)^{2m}\right)$, m = 1, 2, 4, 8.

Вариант (в)

прямоугольный импульс $\xi(t) = \begin{cases} a, & |t| < \tau/2 \\ 0, & |t| > \tau/2 \end{cases}$ и трапециевидный импульс $\xi(t)=\begin{cases}\dfrac{a}{\alpha\tau}\left(t+\dfrac{\tau(1+\alpha)}{2}\right), & -\dfrac{\tau(1+\alpha)}{2}<t<-\dfrac{\tau(1-\alpha)}{2}\\ a, \ |t|<\tau(1-\alpha)/2 & \\ -\dfrac{a}{\alpha\tau}\left(t-\dfrac{\tau(1+\alpha)}{2}\right), & \dfrac{\tau(1-\alpha)}{2}<t<\dfrac{\tau(1+\alpha)}{2}\\ 0, \ t<-\tau(1+\alpha)/2 \text{ и } t>\tau(1+\alpha)/2 & \end{cases}$.

Объяснить изменение коэффициента C при изменении параметра $0 \le \alpha \le 1$.

5.7. (*3*) Исследовать влияние шага дискретизации h на погрешность вычисления спектра прямоугольного импульса $\xi(t)=\begin{cases}a, & |t|<\tau/2\\ 0, & |t|>\tau/2\end{cases}$.

Вычислить и построить в зависимости от частоты ν, взятой в единицах, пропорциональных τ^{-1}, дискретный спектр прямоугольного импульса длительностью τ при шагах дискретизации h = 0,05τ, 0,1τ, 0,2τ, 0,4τ. Интервал периодизации ($T \ge 3\tau$) выбрать так, чтобы размерность сетки составляла $N=T/h=2^p$, где p – целое число. Оценить ширину спектра $\Delta\nu$. Сравнить частоту Найквиста ν_{N} сетки с шириной спектра.

5.8. (*3*) Исследовать влияние шага дискретизации на погрешность вычисления спектра треугольного импульса $y(t)=\begin{cases}a(1-\dfrac{t}{\tau}), & 0 \le t \le \tau\\ 0, & t<0 \text{ и } t>\tau\end{cases}$.

Вычислить и построить в зависимости от частоты ν, взятой в единицах, пропорциональных τ^{-1}, дискретный спектр треугольного импульса длительностью τ при шагах дискретизации h = 0,05τ; 0,1τ; 0,2τ; 0,4τ. Интервал периодизации ($T \ge 3\tau$) выбрать так, чтобы размерность сетки составляла $N=T/h=2^p$, где p – целое число. Оценить ширину спектра $\Delta\nu$. Сравнить частоту Найквиста сетки ν_N с шириной спектра.

5.9. (3) Рассчитать и исследовать спектры последовательности из N одинаковых прямоугольных импульсов ξ_i (i = 1, …, N):

$$\xi_1(t) = \begin{cases} a, & 0 \le t \le \tau \\ 0, & t < 0 \text{ и } t > \tau \end{cases}; \ \xi_i(t) = \xi_1(t - (i-1)T), \quad i = 2, ..., N .$$

Оценить каким-либо способом ширину спектра $\Delta\nu$. Определить положение максимумов спектральной плотности энергии $G(\nu)$ на оси частот. Оценить ширину спектральных линий. Изобразить спектральную плотность энергии $G(\nu)$ для случаев $N = 1, 2, 5, 10$ в зависимости от частоты ν, взятой в единицах, пропорциональных τ^{-1}. Рассмотреть случаи $T = 2\tau$ и 10τ.

5.10. (3) Рассчитать и исследовать спектры последовательности из N одинаковых треугольных импульсов ξ_i ($i = 1, \ldots, N$):

$$\xi_1(t) = \begin{cases} \dfrac{2a}{\tau}(t + \tau/2), & -\tau/2 < t < 0 \\ -\dfrac{2a}{\tau}(t - \tau/2), & 0 < t < \tau/2 \\ 0, & -T/2 < t < -\tau/2 \text{ и } \tau/2 < t < T/2 \end{cases};$$

$$\xi_i(t) = \xi_1(t - (i-1)T), \ i = 2, ..., N .$$

Оценить ширину спектра. Определить положение максимумов спектральной плотности мощности на оси частот. Оценить ширину спектральных линий. Изобразить спектральную плотность энергии $G(\nu)$ для случаев $N = 1, 2, 5, 10$ в зависимости от частоты ν, взятой в единицах, пропорциональных τ^{-1}. Рассмотреть случаи $T = 2\tau$ и 10τ.

§6. Дисперсия волн. Передача информации

Краткие теоретические сведения

Явление дисперсии волн определяет скорость распространения и характер изменения формы импульса в среде. Дисперсия – это зависимость фазовой скорости волны в среде от частоты (длины волны, волнового числа) и, как следствие этого, изменение формы импульса в процессе его распространения в среде. Закон дисперсии, или дисперсионное уравнение, определяющее зависимость фазовой скорости от частоты может быть представлено в различной форме. Например, соотношение (1.9), связывающее фазовую скорость $V_ф$, частоту ω и волновое число k в диспергирующей среде, является одной из форм дисперсионного уравнения:

$$\omega(k) = kV_ф(k) \text{ или } \omega = \omega(k). \tag{6.1}$$

Здесь фазовая скорость волны $V_ф$ зависит от волнового числа k. Функциональные зависимости фазовой скорости $V_ф$ от волнового числа k, либо от длины волны λ, либо от показателя преломления n являются эквивалентными дисперсионными уравнениями:

$$V_ф = V_ф(k), \quad V_ф = V_ф(\lambda), \quad V_ф = V_ф(n). \tag{6.2}$$

Аналогично, зависимости показателя преломления среды n от длины волны λ или от частоты ω также являются дисперсионными уравнениями:

$$n = n(\lambda), \quad n = n(\omega). \tag{6.3}$$

Простыми преобразованиями с помощью соотношений между параметрами волны и среды $V_ф$, k, λ, ω, n осуществляется переход от одной формы дисперсионного уравнения к другой.

Первое приближение теории дисперсии

Дисперсия проявляется при распространении в среде группы волн, называемой обычно волновым пакетом. Возмущение $\xi(x,t)$ в волновом пакете, сформированном бесконечным множеством плоских монохроматических волн, представляется следующим интегралом:

$$\xi(x,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a(k)\exp\big(i(\omega(k)t - kx)\big)dk. \tag{6.4}$$

Относительная величина интервала волновых чисел Δk волн, образующих волновой пакет и, соответственно, полоса частот $\Delta\omega$, полагаются малыми:

$$\frac{\Delta k}{k_0},\ \frac{\Delta\omega}{\omega_0} << 1, \tag{6.5}$$

где ω_0 – центральная частота полосы, k_0 – соответствующее ей волновое число. При условии (6.5) волновой пакет представим квазигармонической волной:

$$\xi(x,t) = A(x,t)\exp\big(i(\omega_0 t - k_0 x)\big), \tag{6.6}$$

амплитуда которой $A(x,t)$, незначительно меняется на временном T и пространственном λ масштабах волны:

$$\frac{\partial A}{\partial t}T,\ \frac{\partial A}{\partial x}\lambda << A. \tag{6.7}$$

Выражение для огибающей волнового пакета $A(x,t)$ следует из (6.4), в которое подставляется дисперсионное уравнение (6.1) после разложения в ряд с точностью до членов первого порядка малости в окрестности частоты $\omega_0 = \omega(k_0)$. В результате имеем

$$A(x,t) = \int_{k_0-\Delta k}^{k_0+\Delta k} a(k)\exp\big(i(k-k_0)(V_{\text{гр}}t - x)\big)dk. \tag{6.8}$$

Представление (6.8) соответствует первому приближению теории дисперсии. В этом приближении все гармоники $a(k)$, образующие амплитуду $A(x,t)$, переносятся по оси OX с одной и той же скоростью $V_{\text{гр}}$, которая называется групповой скоростью и равна:

$$V_{\text{гр}} = \frac{d\omega(k)}{dk}\ \text{при}\ k = k_0. \tag{6.9}$$

В первом приближении теории дисперсии волновой пакет распространяется, не искажаясь, и скорость его распространения равна групповой скорости $V_{\text{гр}}$. Это означает, что огибающая волнового пакета $A(x,t)$ является функцией вида $f(V_{\text{гр}}t - x)$ и подчиняется уравнению переноса:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{V_{\text{гр}}}\frac{\partial}{\partial t}\right)A(x,t) = 0. \tag{6.10}$$

Если перейти к бегущей системе координат (x',η), связанной с центром импульса:

$$x' = x,\ \eta = t - x/V_{\text{гр}}, \tag{6.11}$$

то уравнение для огибающей волнового пакета $A(x',\eta)$ принимает вид:

$$\frac{\partial A(x',\eta)}{\partial x'} = 0\,. \tag{6.12}$$

Полученное уравнение и означает, что форма волнового пакета не меняется при его распространении.

Для вычисления групповой скорости наряду с определением (6.9) можно воспользоваться формулой Релея:

$$V_{\text{гр}} = V_{\text{ф}} - \lambda \frac{dV_{\text{ф}}(\lambda)}{d\lambda} \tag{6.13}$$

при $\lambda = \lambda_0$. В этом случае необходимо заданное дисперсионное уравнение привести к виду (6.2).

Скорость передачи информации.
Второе приближение теории дисперсии

Для передачи сообщений используется последовательность импульсов, каждый из которых несет один бит информации. В простейших алгоритмах анализа таких сообщений принимается, что импульсы различимы, если временной интервал между ними не меньше длительности импульса. Тогда, при длительности импульсов τ_0 для одного бита необходимо время, равное $2\tau_0$, и скорость передачи информации, измеряемая в бит/с, составляет:

$$S = 1/2\tau_0. \tag{6.14}$$

Чтобы повысить скорость передачи информации, необходимо сокращать длительность импульсов. В соответствии с теоремой о ширине частотной полосы (4.17) уменьшение длительности τ_0 приводит к увеличению ширины спектра импульса $\Delta\omega$ и расширению интервала волновых чисел Δk, формирующих импульс. Реальные линии связи: оптическое волокно, коаксиальный кабель, витая пара, волновод, наконец, открытая трасса в воздухе – обладают дисперсией, что ограничивает скорость передачи информации. Вследствие дисперсии форма волнового пакета искажается, его длительность увеличивается, и скорость передачи информации снижается.

Для волнового пакета с широким интервалом волновых чисел Δk первое приближение теории дисперсии становится не справедливым, и необходимо учитывать следующие члены разложения в дисперсионном уравнении $\omega = \omega(k)$. Для оценки увеличения длительности δt волнового пакета можно принять, что крайние гармоники этого диапазона $k_0 - \Delta k$ и $k_0 + \Delta k$ распространяются в диспергирующей среде с разными групповыми скоростями $V_{\text{гр}}(k_0 - \Delta k)$ и $V_{\text{гр}}(k_0 + \Delta k)$, соответственно. Отсюда, для увеличения длительности δt волнового пакета следует оценка:

$$\delta t = l \left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} \Delta\omega, \tag{6.15}$$

где l – длина распространения в диспергирующей среде. Используя теорему о ширине частотной полосы (4.16), выражение (6.15) можно переписать в виде:

$$\delta t = 2\pi l \left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} \tau_0^{-1}. \tag{6.16}$$

В точке приема длительность импульса составит $t + \delta t$, и скорость передачи информации при учете дисперсионного уширения импульса в линии связи снизится до величины:

$$S_{\text{дисп}} = \left(2\tau + 4\pi l \left| \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \right|_{\omega_0} \tau_0^{-1} \right)^{-1}. \tag{6.17}$$

Таким образом, оптимальная длительность импульса, при которой достигается максимальная скорость передачи информации, зависит от дисперсионных свойств линии связи. Так, оптическое волокно имеет наименьшие потери на длине волны $\lambda = 1{,}55$ мкм, а величина $\partial^2 k / \partial\omega^2 = 0$ при $\lambda = 1{,}3$ мкм. Поэтому во многих оптоволоконных линиях связи для получения наибольшей скорости передачи информации используется световые импульсы на длине волны $\lambda = 1{,}3$ мкм.

Во втором приближении теории дисперсии уравнение для огибающей волнового пакета $A(x,t)$ имеет вид:

$$2i \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{V_{\text{гр}}} \frac{\partial}{\partial t} \right) A(x,t) + \frac{\partial^2 k}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} = 0. \tag{6.18}$$

В бегущей системе координат (6.11) огибающая $A(x',\eta)$ описывается уравнением параболического типа с мнимым коэффициентом:

$$2i\frac{\partial A(x',\eta)}{\partial x'}+\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2 A(x',\eta)}{\partial\eta^2}=0. \tag{6.19}$$

Автомодельным решением уравнений (6.18) и (6.19) является гауссовая форма огибающей волнового пакета, которая записывается следующим образом:

$$A(x',\eta)=A_0\frac{\tau_0}{\tau(x')}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2\tau^2(x')}\right)\exp\left(-i\,\mathrm{sign}\left(\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\right)\frac{\eta^2}{\tau^2(x')}\frac{x'}{L_{\text{дисп}}}\right), \tag{6.20}$$

где $\tau(x')=\tau_0\sqrt{1+\left(x'/L_{\text{дисп}}\right)^2}$ – длительность импульса на расстоянии x' и $L_{\text{дисп}}=\dfrac{\tau_0^2}{\left|\partial^2 k/\partial\omega^2\right|}$ – дисперсионная длина, равная расстоянию на котором длительность огибающей волнового пакета увеличивается в $\sqrt{2}$ раз.

Примеры решения задач

Пример 6.1. Представить групповую скорость электромагнитной волны как функцию показателя преломления и его производной, зависящих от 1) длины волны и 2) частоты.

Решение. 1) Используя формулу Релея (6.13) и соотношение $n=c/V_{\text{ф}}$, получаем выражение $V_{\text{гр}}=c\left(\dfrac{1}{n}-\lambda\dfrac{d}{d\lambda}\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ или $V_{\text{гр}}=\dfrac{c}{n}\left(1+\dfrac{\lambda}{n}\dfrac{dn}{d\lambda}\right)$.

2) Переход к производной показателя преломления по частоте можно осуществить прямым преобразованием полученного выражения с использованием соотношений $\lambda=\dfrac{2\pi c}{n\omega}$ и $\dfrac{dn}{d\lambda}=\dfrac{dn}{d\omega}\dfrac{d\omega}{d\lambda}$. Однако, проще воспользоваться определением групповой скорости в виде $V_{\text{гр}}^{-1}=\dfrac{dk}{d\omega}$ и соотношением $k=n\omega/c$.

В этом случае получаем $V_{\text{гр}}^{-1}=\dfrac{n}{c}+\dfrac{\omega}{c}\dfrac{dn}{d\omega}$ и $V_{\text{гр}}=\dfrac{c}{n}\left(1+\dfrac{\omega}{n}\dfrac{dn}{d\omega}\right)^{-1}$.

Используя определение фазовой скорости, полученные соотношения можно записать в виде $\frac{V_{\text{гр}}}{V_{\text{ф}}} = \left(1 + \frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right) = \left(1 + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right)^{-1}$. Заметим, что такое представление полезно при анализе соотношения фазовой и групповой скоростей в областях нормальной и аномальной дисперсии.

Пример 6.2. Найти групповую скорость волны по известной фазовой скорости для 1) акустической волны в воздухе ($V_{\text{ф}} = a$), 2) поперечной упругой волны в стержне ($V_{\text{ф}} = b/\lambda$), 3) глубоководной волны ($V_{\text{ф}} = c\sqrt{\lambda}$) ($a$, b и c – константы).

Решение. Воспользуемся формулой Релея (6.13). В первом случае фазовая скорость постоянна, поэтому $V_{\text{гр}} = V_{\text{ф}}$. Во втором случае имеем $V_{\text{гр}} = \frac{b}{\lambda} + \frac{\lambda b}{\lambda^2} = 2V_{\text{ф}}$. В третьем случае групповая скорость определяется выражением $V_{\text{гр}} = c\sqrt{\lambda} - \frac{\lambda c}{2\sqrt{\lambda}} = \frac{V_{\text{ф}}}{2}$.

Пример 6.3. Относительная диэлектрическая проницаемость ионизованного газа определяется выражением $\varepsilon = 1 - (\omega_{\text{пл}}/\omega)^2$, где $\omega_{\text{пл}}$ – значение плазменной частоты. Используя приведенную зависимость $\varepsilon(\omega)$, получить дисперсионную формулу $\omega^2 = \omega_{\text{пл}}^2 + c^2k^2$. Найти выражения для фазовой и групповой скоростей.

Решение. Используя соотношения $n = \sqrt{\varepsilon}$ и $n = c/V_{\text{ф}}$, получаем выражение для фазовой скорости: $V_{\text{ф}} = V_{\text{ф}}(\omega) = c\left[1 - (\omega_{\text{пл}}/\omega)^2\right]^{-1/2}$. Преобразуем это соотношение к виду $1 - \omega_{\text{пл}}^2/\omega^2 = c^2/V_{\text{ф}}^2$. Подставляя выражение $V_{\text{ф}} = \omega/k$ для фазовой скорости, получаем: $1 - \omega_{\text{пл}}^2/\omega^2 = c^2k^2/\omega^2$. Затем, умножив обе части равенства на ω^2, находим требуемое дисперсионное соотношение: $\omega^2 = \omega_{\text{пл}}^2 + c^2k^2$.

Считая, что частота является функцией волнового числа $\omega = \omega(k)$, продифференцируем по k полученное дисперсионное соотношение – $2\omega\frac{d\omega}{dk} = 2c^2k$. Используя определение групповой скорости $V_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk}$, получим: $V_{\text{гр}} = V_{\text{гр}}(\omega) = \frac{c^2k}{\omega} = \frac{c^2}{V_{\text{ф}}} = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_{\text{пл}}}{\omega}\right)^2}$.

Таким образом, фазовая и групповая скорости электромагнитных волн в плазме выражаются через скорость в вакууме c следующим образом: $V_{\text{ф}} = c/n$ и $V_{\text{гр}} = cn$. Поскольку показатель преломления плазмы в полосе прозрачности всегда меньше единицы, то фазовая скорость всегда больше c, а групповая скорость всегда меньше c.

Пример 6.4. При зондировании разреженной плазмы радиоволнами различных частот обнаружили, что для излучения с длиной волны, большей λ_0 = 0,75 м, возможно полное внутреннее отражение. Определить концентрацию свободных электронов в этой плазме, используя теорию дисперсии электромагнитных волн в плазме (ионосфере).

Решение. Дисперсионные свойства плазмы определятся следующей частотной зависимостью показателя преломления $n_{\text{пл}}^2 = 1-(\omega_{\text{пл}}/\omega)^2$, где $\omega_{\text{пл}}$ – плазменная частота, которая является одним из параметров плазмы. Из приведенного дисперсионного соотношения видно, что по сравнению с воздухом плазма является оптически менее плотной средой, так как в области прозрачности, где $n_{\text{пл}}$ – действительная величина, коэффициент преломления всегда меньше единицы. Таким образом, при падении излучения на границу раздела воздух–плазма возможен эффект полного внутреннего отражения. Угол падения, при котором начинает наблюдаться этот эффект, определяется соотношением $\alpha = \arcsin(n_{\text{пл}})$. Ясно, что наблюдать эффект полного внутреннего отражения при сравнительно небольших углах падения можно, если частота падающего излучения не очень велика, поскольку при $\omega >> \omega_{\text{пл}}$ показатель преломления $n_{\text{пл}} = 1$. Вместе с тем, частота излучения ω не может опускаться ниже значения плазменной частоты $\omega_{\text{пл}}$. В противном случае показатель преломления плазмы $n_{\text{пл}}$ становится комплексным, что соответствует поглощению излучения в плазме. Таким образом, для оценки предположим, что частота ω излучения, используемого в экспериментах по зондированию разреженной плазмы, превышает плазменную частоту, оставаясь близкой к ней: $\omega > \omega_{пл}$. Одновременно по условию задачи надо определить частоту излучения ω, которая меньше, чем частота, соответствующая длине волны λ_0, то есть должно выполняться неравенство $\omega < 2\pi c / \lambda_0$.

Выражение для плазменной частоты имеет вид $\omega_{пл}^2 = \dfrac{Ne^2}{m\varepsilon_0}$, где e и m – заряд и масса электрона, а N – концентрация свободных электронов в плазме. Таким образом, для оценки концентрации свободных электронов в плазме получаем выражение $N < \dfrac{4\pi^2 c^2 m\varepsilon_0}{\lambda_0^2 e^2}$. Подставляя численные значения электрической постоянной $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ А·с/(В·м), массы электрона $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг и его заряда $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, находим верхнюю оценку для концентрации электронов в плазме $N < 2 \cdot 10^9$ см$^{-3}$. Для сравнения: концентрация свободных электронов в нижних слоях земной ионосферы порядка 10^5 см$^{-3}$.

Задания для самостоятельной работы[1]

6.5. (*2*) Показать, что в диспергирующей среде фазовая $V_ф$ и групповая $V_{гр}$ скорости света связаны следующим соотношением:

$$\frac{1}{V_{гр}} = \frac{1}{V_ф} - \frac{1}{c}\lambda\frac{dn(\lambda)}{d\lambda},$$

где c – фазовая скорость света в вакууме, λ – длина волны в вакууме, n – показатель преломления среды. С помощью полученной формулы предложить способ графического определения отношения $c/V_{гр}$ по известной зависимости $n(\lambda)$.

Рассмотреть случаи нормальной и аномальной дисперсии.

Пользуясь графической зависимостью $n(\lambda)$ для KCl, приведенной в *Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976* на рис. 28.3, найти значения $V_ф$ и $V_{гр}$ для света с длиной волны λ = 680 нм и λ = 600 нм.

---

[1] В скобках указана степень сложности задания, которая оценивается в баллах от 1 (наименьшая сложность) до 3 (наибольшая сложность).

6.6. (*2*) Фазовая скорость поперечных волн в кристалле с межатомным расстоянием a определяется выражением $V_{ф} = c\sin\left(\frac{ka}{2}\right)\Big/\frac{ka}{2}$, где k – волновое число, а c – постоянная. Найдите выражение для групповой скорости $V_{гр}$. Каково предельное значение групповой скорости при больших длинах волн $\lambda >> a$? Является дисперсия в кристалле нормальной или аномальной? Построить графики зависимостей $V_{ф}$ и $V_{гр}$ от λ в диапазоне λ = 0,4–0,7 мкм при $a = 10^{-8}$ см и $c = 5\cdot 10^{3}$ м/с.

<u>*Литература*</u>

Л.Н. Капцов, Физика элементов ЭВМ, М.: изд-во МГУ, 1983, гл. 3, § 9.
Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, гл. 6, §§ 6.1, 6.2.

6.7. (*3*) Исследовать дисперсию волн в одномерной цепочке. Получить дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ и построить соответствующий график зависимости частоты ω от волнового числа k. По дисперсионному соотношению найти полосу прозрачности для волн в цепочке и определить границы этой полосы на оси частот. Получить выражения для фазовой и групповой скоростей в полосе прозрачности. Изобразить для некоторого момента времени смещения масс для волн, частоты которых лежат в полосе прозрачности и вне этой полосы. Рассмотреть следующие варианты.

<u>Вариант (а)</u>

Цепочка одинаковых маятников длиной l и массой m, связанных между собой пружинами жесткостью c, длина которых a равна расстоянию между маятникам. При представлении результатов частоту волны ω выразить как отношение ω/ω', где $\omega'^2 = ca^2/m$. Границу полосы прозрачности сравнить с собственной частотой маятников $\omega_0 = \sqrt{g/l}$. где g – ускорение свободного падения.

<u>Вариант (б)</u>

Система чередующихся грузов на натянутой невесомой бесконечной струне. Грузы колеблются перпендикулярно струне; заданы натяжение струны T, массы грузов m и M, расстояние между соседними грузами d. При представлении результатов волновое число k выразить в единицах $\pi/2d$.

6.8. (*3*) Исследовать дисперсию волн в цепочках, представляющих собой LC электрические фильтры, представляющие собой бесконечную цепочку последовательно соединенных элементов из катушек индуктивностью L и конденсаторов емкостью C. Получить дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ и построить соответствующий график. По дисперсионному соотношению найти полосу прозрачности для волн в цепочке и определить границы этой полосы на оси частот. Получить выражения для фазовой и групповой скоростей в полосе прозрачности. Построить зависимости фазовой и групповой скоростей от величины, равной отношению частоты волны ω к частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Определить амплитуду колебаний тока, протекающего в элементах цепочки. При решении записать уравнения Кирхгофа для n-го элемента цепочки. Рассмотреть следующие варианты.

Вариант (а)

Фильтр нижних частот. Каждый элемент состоит из последовательно соединенных катушки L и конденсатора C. Входом элемента являются свободные концы катушки и конденсатора, а выходом – точка соединения катушки L с конденсатором C и свободный конец конденсатора.

Вариант (б)

Фильтр верхних частот. Каждый элемент состоит из последовательно соединенных конденсатора C и катушки L. Входом элемента являются свободные концы конденсатора и катушки, а выходом – точка соединения конденсатора C с катушкой L и свободный конец катушки.

6.9. (*3*) Исследовать дисперсию волн в одномерной модели ионного кристалла, представляющей собой линейную цепочку чередующихся масс m и M, соединенных пружинами одинаковой жесткости β и длины l. Вывести уравнение движения масс, предполагая, что они смещаются вдоль цепочки. Получить дисперсионное соотношение $\omega = \omega(k)$ и построить соответствующие графики для акустической и оптической ветвей дисперсионной кривой. По дисперсионному соотношению найти границы полос прозрачности на оси частот. Определить распределение амплитуд колебаний масс для волн в акустической и оптической ветвях. Найти фазовую и групповую скорости для акустической и оптической ветвей. Исследовать распространение инфракрасного излучения с длиной волны $\lambda = 61$ мкм в кристалле NaCl и инфракрасного излучения с длиной волны $\lambda = 71$ мкм в кристалле KCl, полагая, что $\beta = 15$ Н/м.

Литература

Г. Пейн, Физика колебаний и волн, 1979, гл. 4.

М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков, Теория волн, 1979.

6.10. (*2*) Через каждые 3,6 с пульсар излучает импульсы радиоволн на различных частотах. Если приемник радиотелескопа перестроить с частоты f_1 = 150 МГц на частоту f_2 = 240 МГц, то импульс будет регистрироваться раньше на время Δt = 1,3 с. Используя теорию дисперсии для плазмы, и полагая, что пульсар излучает одновременно импульсы на частотах f_1 и f_2, определить расстояние до пульсара. Расстояние до пульсара представить в парсеках (1 пс $\approx 3{,}09 \cdot 10^{16}$ м $\approx$ 3,26 световых года). Сравнить это расстояние со средним расстоянием от Земли до Солнца и с диаметром нашей галактики. Получить дисперсионное соотношение $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ для межзвездного пространства, объяснить механизм возникновения дисперсии, найти фазовую и групповую скорости. При решении рассматривать межзвездное пространство как плазму, состоящую из свободных электронов с концентрацией $N = 3 \cdot 10^{-2}$ см$^{-3}$.

<u>*Литература*</u>

Д.В. Сивухин, Общий курс физики. Оптика, М.: Наука, 1980, § 87.

6.11. (*2*) Исследовать дисперсию волн в ионосфере. Записать уравнение движения электронов, полагая их свободными. Получить дисперсионное соотношение $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$. Объяснить механизм возникновения дисперсии в плазме. Найти фазовую и групповую скорости в плазме. Построить графики частотных зависимостей показателя преломления плазмы, а также фазовой и групповой скоростей в плазме. Частоту f отнести к плазменной частоте $f_{пл}$. Объяснить:

1) отражение радиоволн КВ диапазона ($f \geq f_{пл}$) от ионосферы, которое используется в радиосвязи,

2) прозрачность ионосферы для волн ТВ и УКВ диапазонов ($f >> f_{пл}$).

<u>*Литература*</u>

Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, §§ 3.5, 4.3, 6.1, 6.2.

Д.В. Сивухин, Общий курс физики. Оптика, М.: Наука, 1980, § 87.

6.12. (*3*) Волна *H*-типа или иначе ТЕ волна (поле Е – ортогонально оси волновода, поле Н имеет осевую компоненту) распространяется в прямоугольном волноводе вдоль оси *X*. В плоскости поперечного сечения *YOZ* размер волновода по оси *Y* равен a, по оси *Z* – b. Получить волновое уравнение для продольной компоненты магнитного поля H_x. Вывести дисперсионное уравнение и представить его в виде

$k_x = k_x(\omega, k_y, k_z)$, где $k_y = m\pi / a$ и $k_z = n\pi / b$, здесь $m, n = 0, 1, 2, \ldots$ – целые. Определить граничную частоту ω_{mn} и граничную длину волны λ_{mn} для бегущей волны TE_{mn}. Изобразить распределение амплитуд электрического E_y и E_z и магнитного H_y и H_z полей в поперечном сечении волновода. Найти фазовую и групповую скорости волны, распространяющейся по оси X в волноводе в полосе пропускания. Объяснить качественно возникновение дисперсии в волноводе.
Рассмотреть случаи:
1) $m = 0$, $n = 1$; 2) $m = 0$, $n = 2$; 3) $m = 1$, $n = 0$.
Литература
Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, § 7.2.
А.Н. Матвеев, Электричество и магнетизм, 1983, § 66.
М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков, Теория волн,1979, гл.10, §3.

6.13. (*3*) Волна *E*-типа или иначе TM волна (поле H – ортогонально оси волновода, поле E имеет осевую компоненту) распространяется в прямоугольном волноводе вдоль оси X. В плоскости поперечного сечения YOZ размер волновода по оси Y равен a, по оси Z – b. Получить волновое уравнение для продольной компоненты электрического поля E_x. Вывести дисперсионное уравнение и представить его в виде $k_x = k_x(\omega, k_y, k_z)$, где $k_y = m\pi / a$ и $k_z = n\pi / b$ ($m, n = 0, 1, 2, \ldots$ – целые). Определить граничную частоту ω_{mn} и граничную длину волны λ_{mn} для бегущей волны TM_{mn}. Изобразить изменение амплитуды E_x в поперечном сечении волновода. Найти фазовую и групповую скорости в полосе пропускания волновода. Объяснить качественно возникновение дисперсии в волноводе. Рассмотреть случаи: 1) $m = n = 1$ и 2) $m = 2$, $n = 1$.
Литература
Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, § 7.2.
А.Н. Матвеев, Электричество и магнетизм, 1983, § 66.
В.Г. Левич и др., Курс теоретической физики, т. 2, 1962, § 38.

6.14. (*3*) Волновой пакет является суперпозицией бесконечного множества плоских гармонических волн, амплитуды которых имеют следующее частотное распределение:

$$a = a_0 \exp\left(-\frac{2(\omega - \omega_0)^2 \tau_0^2}{(2\pi)^2} \right),$$

где ω_0 – несущая частота, а τ_0 – длительность пакета. Таким образом, при $x = 0$, пакет имеет вид

$$\xi(x=0,t) = a_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2(\omega-\omega_0)^2\tau_0^2}{(2\pi)^2}\right)\exp(i\omega t)d\omega \ .$$

Волновой пакет падает на диспергирующую среду. Исследовать дисперсионное расплывание пакета в среде в приближении второго порядка теории дисперсии, то есть положив, что $k(\omega) = k_0 + \frac{1}{V_{\text{гр}}}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\right|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^2$, где $V_{\text{гр}}$ и $\left.\frac{\partial^2 k}{\partial\omega^2}\right|_{\omega_0}$ известны. Рассчитать распределение интенсивности $I(\eta) = \xi(\eta)\xi^*(\eta)$ в пакете в зависимости от бегущего времени $\eta = t - x/V_{\text{гр}}$ при разных расстояниях x. Построить форму пакета для нескольких значений x. Вычислить энергию волнового пакета $W = \int_{-\infty}^{\infty} I(\eta)d\eta$. Найти зависимость длительности пакета от расстояния x.

Литература

В.В. Батыгин, И.Н. Топтыгин, Сборник задач по электродинамике, 1970, гл. 8, § 1.

С.А. Ахманов, В.А. Выслоух, А.С. Чиркин, Оптика фемтосекундных лазерных импульсов, 1988, § 1.1 и 1.3.

6.15. (*1*) Найти концентрацию свободных электронов в ионосфере, если для радиоволн с частотой $f = 10^8$ Гц показатель преломления в ионосфере $n = 0{,}9$. Получить уравнение дисперсии электромагнитных волн в ионосфере и объяснить механизм возникновения дисперсии. Построить графики зависимостей фазовой и групповой скоростей от частоты. Определить плазменную частоту $f_{\text{пл}}$. Найти фазовую и групповую скорости для $f = 10^8$ Гц.

Литература

Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, §§ 3.5, 4.3.

Д.В. Сивухин, Общий курс физики. Оптика, М.: Наука, 1980, § 87.

6.16. (*2*) Цифровая информация передается по оптоволоконной лини связи длиной $l = 10$ км. В линии используется инфракрасное излучение на длине волны $\lambda = 1$ мкм, для которого показатель преломления материала волокна $n = 1{,}5$. Длительность входного импульса, используемого в линии $\tau(0) = 1$ пс. Для временного разделения импульсов приемными устройствами период их следования T должен быть вдвое больше длительности $\tau(l)$ импульса на выходе линии. Оценить максимальную скорость передачи информации (в бит/с), учитывая дисперсионное расплывание импульсов в линии, если $\partial n/\partial\lambda = 4\cdot 10^{-3}$ мкм$^{-1}$. Для оценки использовать изменение групповой скорости в диапазоне длин волн, соответствующем спектру импульса. Принять, что $\dfrac{\partial^2 n}{\partial\lambda^2} << \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\partial n}{\partial\lambda}\right)^2$.

Литература
И.Н. Мешков, Б.В. Чириков, Электромагнитное поле, ч. 1, 1987, § 85.

6.17. (*2*) Телеметрическая информация со спутника передается на наземную станцию в виде последовательности радиоимпульсов. Для временного разделения импульсов приемными устройствами период их следования T должен быть вдвое больше длительности $\tau(l)$ в месте приема. Оценить максимальную скорость передачи информации (в бит/с), учитывая дисперсионное расплывание импульсов в ионосфере, если приемник находится на расстоянии l от спутника. Принять, что на всей длине линия связи находится в однородной ионосфере с известным значением плазменной частоты $f_{пл}$. Для оценки использовать значения групповой скорости на границах спектра импульса. Рассмотреть следующие варианты.

Вариант (а)

Длина канала связи $l = 600$ км. Канал работает на длине волны $\lambda = 3$ м. Длительность импульса передатчика $\tau(0) = 3$ мкс. Плазменная частота ионосферы $f_{пл} = 30$ МГц.

Вариант (б)

Длина канала связи $l = 1000$ км. Несущая частота радиоимпульсов $f_0 = 3$ МГц. Длительность импульса передатчика $\tau(0) = 50$ мкс. Плазменная частота ионосферы $f_{пл} = 2{,}6$ МГц.

Литература
Д.В. Сивухин, Общий курс физики. Оптика, М.: Наука, 1980, § 87.
И.Н. Мешков, Б.В. Чириков, Электромагнитное поле, ч. 1, 1987, § 85.

6.18. (*2*) Информация передается по волноводному тракту в виде радиоимпульсов с несущей частотой f_0 . Используется TM_{mn} волна, у которой поле H – ортогонально оси волновода, поле E имеет осевую компоненту. (Индексы $m, n = 0, 1, 2, ...$ – целые.) Длительность импульсов передатчика $\tau(0)$ = 5 нс. Длина тракта z = 100 м. Для временного разделения импульсов приемными устройствами период их следования T должен быть вдвое больше длительности $\tau(l)$ в месте приема. Оценить максимальную скорость передачи информации (в бит/с), учитывая дисперсионное расплывание импульсов в волноводе, если он имеет прямоугольное сечение со сторонами $a = 1$ см и $b = 3$ см. Для оценки рассмотреть зависимость групповой скорости от частоты, используя дисперсионное соотношение для волновода: $k_z = \sqrt{\omega^2 / c_0^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$, где $k_x = m\pi / a$ и $k_y = n\pi / b$.

Рассмотреть следующие варианты.

<u>Вариант (а)</u>

Используется TM_{11} волна на несущей частоте f_0 = 20 ГГц.

<u>Вариант (б)</u>

Используется TM_{33} волна на несущей частоте f_0 = 60 ГГц.

Литература

В.Г. Левич и др., Курс теоретической физики, т. 2, 1962, § 38.

А.Н. Матвеев, Электричество и магнетизм, 1983, § 66.

М.Б. Виноградова, О.В. Руденко, А.П. Сухоруков, Теория волн,1979, гл.10, §3.

§7. Интерференция. Когерентность

Краткие теоретические сведения

Интерференция это перераспределение интенсивности в пространстве при наложении двух или более волн. Явление интерференции имеет место для волн любой природы. В основе интерференции лежит принцип суперпозиции, то есть линейного наложения волн.

Распределение результирующей интенсивности I в пространстве при интерференции двух волн определяется фазовым сдвигом φ между волнами:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi\,, \qquad (7.1)$$

где I_1 и I_2 – интенсивности падающих волн. Фазовый сдвиг φ связан с оптической разностью хода волн δ соотношением:

$$\varphi = 2\pi\delta/\lambda\,. \qquad (7.2)$$

В случае распространения волн в вакууме (воздухе), оптическая разность хода равна разности двух расстояний: каждое их них измеряется от точки наблюдения до источника, где фазы волн совпадают. Необходимо помнить, что если волна хотя бы часть пути проходит в среде с показателем преломления $n \neq 1$, то в оптическую разность входа следует включить произведение этого показателя преломления на длину пути в этой среде.

В простейшем случае результирующая интенсивность в интерференционной картине зависит от сдвига фаз φ следующим образом:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\varphi\,, \qquad (7.3)$$

где I_1 и I_2 – интенсивности падающих волн.

Максимумы интерференционной картины реализуются тогда, когда две волны одинаковых частот приходят в точку наблюдения "в фазе", то есть при условии:

$$\varphi = 2\pi m,\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\,. \qquad (7.4)$$

Это соответствует оптической разности хода δ, равной четному числу полуволн:

$$\delta = 2m\cdot\frac{\lambda}{2},\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\,. \qquad (7.4а)$$

Минимум реализуется, если волны с одинаковыми частотами приходят в точку наблюдения в противофазе:

$$\varphi = \pi(2m+1),\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\,. \qquad (7.5)$$

В этом случае разность хода δ равна нечетному числу полуволн:

$$\delta = (2m+1)\cdot\frac{\lambda}{2},\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ . \qquad (7.5а)$$

В максимумах результирующая интенсивность $I_{\max}$ равна:

$$I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\ , \qquad (7.6)$$

в минимумах имеем

$$I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}\ . \qquad (7.7)$$

При равной интенсивности интерферирующих волн $I_1 = I_2 = I_0$ зависимость (7.3) для результирующей интенсивности принимает вид:

$$I = 2I_0(1+\cos\varphi)\ . \qquad (7.8)$$

В максимумах – $I_{\max} = 4I_0$, в минимумах – $I_{\min} = 0$.

Если на экран почти перпендикулярно падают две плоские волны с одинаковыми частотами (длинами волн) и угол между волновыми векторами этих волн равен α, то расстояние Δx между соседними интерференционными максимумами (минимумами) определяется выражением:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2\sin(\alpha/2)}\ . \qquad (7.9)$$

Если угол мал ($\alpha \ll 1$), то на экране наблюдаются прямолинейные интерференционные полосы, расстояние между которыми равно

$$\Delta x \approx \lambda/\alpha\ . \qquad (7.9а)$$

В случае интерференции волн одинаковой частоты, испускаемых точечными источниками, расположенными на расстоянии d друг от друга и на одинаковом расстоянии L от экрана, также образуются интерференционные полосы. При $d \ll L$ расстояние между максимумами (минимумами) интерференционной картины Δx с точностью до величин второго порядка малости определяется выражением, следующим из (7.8):

$$\Delta x \approx \frac{\lambda\cdot L}{d}\ . \qquad (7.10)$$

Интерференционную картину можно наблюдать только в случае наложения когерентных волн, то есть волн, у которых частоты совпадают, а фазы не меняются во времени и пространстве. Если волны не когерентны, перераспределения интенсивности в пространстве не происходит, интерференции нет, и в любой точке суммарная интенсивность равна сумме интенсивностей падающих волн. Вообще, когерентность это согласованность (коррелированность) изменения во времени и в пространстве волновых процессов. Волны могут быть частично когерентными, и их степень когерентности $\gamma(\tau)$ определяется функцией взаимной корреляции волн $\Gamma_{12}(\tau)$:

$$\gamma(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} = \frac{\left\langle \xi_1(t+\tau)\, \xi_2^*(t) \right\rangle}{\sqrt{I_1 I_2}}, \tag{7.11}$$

где угловые скобки означают усреднение по времени, а $\xi_1(t+\tau)$ и $\xi_2(t)$ – возмущения, которые создают источники в точке наблюдения, и которые могут случайно меняться во времени. Запаздывание во времени первой волны относительно второй в точке наблюдения τ определяется разностью хода $\tau = \delta / c$, где c – фазовая скорость в среде.

При наложении частично когерентных волн ухудшается контраст интерференционной картины. В этом случае результирующая интенсивность в точке наблюдения равна:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, \mathrm{Re}\, \gamma(\tau). \tag{7.12}$$

При интерференции квазимонохроматических волн, у которых амплитуда a медленно меняется во времени, то есть $\xi_{1,2}(t) = a_{1,2}(t) \exp(i\omega t)$, где $\dfrac{\partial a}{\partial t} T << a$, суммарная интенсивность представима в виде

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\, |\gamma(\tau)|\, \mathrm{Re}(\exp(i\omega\tau)). \tag{7.13}$$

Множитель $\mathrm{Re}(\exp(i\omega\tau)) = \pm 1$ определяет возникновение максимумов и минимумов интерференционной картины, а множитель $|\gamma(\tau)|$ – их величину:

$$I_{\max,\min} = I_1 + I_2 \pm 2\sqrt{I_1 I_2}\, |\gamma(\tau)|. \tag{7.14}$$

Видимость или контраст интерференционной картины определяется как следующее отношение:

$$V(\tau) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = 2\frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma(\tau)|. \tag{7.15}$$

При равной интенсивности интерферирующих волн $I_1 = I_2 = I_0$ видимость $V(\tau)$ совпадает с модулем степени когерентности: $V(\tau) = |\gamma(\tau)|$.

Теорема Винера–Хинчина устанавливает связь между автокорреляционной функцией сигнала $\Gamma(\tau) = \left\langle \xi(t+\tau)\,\xi^*(t) \right\rangle$ и его спектральной плотностью энергии $G(\omega) = 2\pi |S(\omega)|^2$ (см. (4.29)):

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\tau)\exp(i\omega\tau)d\tau\,;\ \Gamma(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\exp(-i\omega\tau)d\omega\,. \qquad (7.16)$$

Примеры решения задач

Пример 7.1. Направления распространения двух плоских волн одной и той же длины λ составляют друг с другом малый угол α. Волны падают на экран, плоскость которого перпендикулярна биссектрисе этого угла. Показать, что расстояние Δx между двумя соседними интерференционными полосами на экране определяется выражением $\Delta x \approx \lambda/\alpha$. Как изменится это выражение, если волны падают на экран наклонно, так что биссектриса угла между их волновыми векторами составляет угол β с нормалью к экрану?

Решение. Предположим, что две плоские волны приходят в некоторую точку экрана A в фазе (то есть с относительным фазовым сдвигом кратным 2π). Ясно, что в точке A будет наблюдаться максимум интерференционной картины. Рассмотрим в плоскости, проходящей через волновые векторы, точку экрана B, находящуюся на расстоянии Δx от т. A. Одна из плоских волн попадает в точку B раньше, чем в точку A, а другая позже. Из геометрических соображений следует, что абсолютная величина пространственного опережения (запаздывания) волн в точке B по сравнению с точкой A определяется выражением $d = \Delta x \sin(\alpha/2) \approx \Delta x \cdot \alpha/2$. Изменение сдвига фаз $\Delta\varphi_{AB}$ волн в точке B по сравнению со сдвигом в точке A составляет:

$$\Delta\varphi_{AB} = k \cdot 2d \approx 2\pi\alpha\Delta x/\lambda$$

Величина Δx приобретает смысл ширины интерференционной полосы, если $\Delta\varphi_{AB} = 2\pi$. В этом случае в точке B образуется следующий интерференционный максимум. Таким образом, $2\pi\alpha\Delta x/\lambda = 2\pi$ и ширина полосы $\Delta x = \lambda/\alpha$, что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что экран повернули на угол β вокруг оси, перпендикулярной волновым векторам и проходящей через точку А и, тем самым, реализовали наклонное падение плоских волн. Из геометрических соображений следует, что одна волна проходит до точки *B* дополнительное расстояние $d_1 = \Delta x \sin(\beta + \alpha/2)$, а другая – расстояние $d_2 = \Delta x \sin(\beta - \alpha/2)$. Изменение сдвига фаз между волнами в точке B относительно сдвига в точке *A* составляет теперь:

$$\Delta\varphi_{AB} = k(d_1 - d_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\left(\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \approx \frac{2\pi\alpha\Delta x}{\lambda}\cos\beta$$

Здесь, как и ранее, используется малость величины угла α. Отсюда, ширина интерференционной полосы равна:

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\varphi\cos\beta},$$

то есть интерференционные полосы становятся шире, чем в случае почти перпендикулярного падения.

Пример 7.2. От двух когерентных точечных источников света получена интерференционная картина на экране, удаленном от источников на расстояние $L = 2$ м. Во сколько раз изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 40$ см так, чтобы источники оказались в ее фокальной плоскости? Расстояние между источниками много меньше *f*.

Решение. В отсутствии линзы в центре экрана наблюдается интерференционный максимум. Рассмотрим некоторую точку экрана, смещенную на расстояние *y* от его центра в плоскости, проходящей через волновые векторы падающих волн. Расстояния от источников до этой точки определяются выражениями:

$$d_1 = \sqrt{L^2 + (y + d/2)^2} \text{ и } d_2 = \sqrt{L^2 + (y - d/2)^2}$$

где *d* – расстояние между источниками. По условиям задачи $d \ll L$, поэтому разность хода до точки наблюдения можно представить в виде:

$$\delta = (d_1 - d_2) \approx L\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2y + d}{2L}\right)^2\right) - L\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2y - d}{2L}\right)^2\right) = \frac{yd}{L}.$$

Расстояние *y* приобретает смысл ширины интерференционной полосы, если $kd = 2\pi$, то есть точка наблюдения соответствует ближайшему к центральному интерференционному максимуму. Таким образом, ширина интерференционной полосы определяется соотношением:

$$k\frac{yd}{L} = \frac{2\pi yd}{\lambda L} = 2\pi \text{ или } y = \lambda L/d.$$

Проведем численную оценку для излучения оптического диапазона (пусть $\lambda = 500$ нм). Тогда при расстоянии между щелями, например, $d = 5$ мм ширина полосы будет составлять $y = 0{,}2$ мм.

Поместим линзу между источниками света и экраном. Сферическая волна точечного источника, расположенного в фокальной плоскости, становится за линзой плоской волной, распространяющейся под некоторым углом к оптической оси. Из геометрической оптики следует, что за линзой угол между двумя волновыми векторами волн, исходящих из разных источников, определяется соотношением $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2f}$ или, с учетом условия $d << f$, $\alpha = d / f$. Используя решение предыдущей задачи, где получена ширина полос в интерференционной картине при падении на экране двух плоских волн, распространяющихся под углом α друг к другу, получаем, что в присутствии линзы ширина полос составляет $y_{\text{линза}} = \lambda f / d$. Таким образом, в рассмотренной схеме помещение линзы приводит к сужению интерференционных полос в $y / y_{\text{линза}} = L / f = 5$ раз.

Пример 7.3. Интерферометр имеет две щели на расстоянии d. Одна щель закрыта прозрачной стеклянной пластинкой толщиной $l = 1$ мм, другая щель открыта. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$. Определите (в длинах волн) запаздывание света, проходящего через щель, прикрытую пластинкой ($\lambda = 500$ нм). Сколь узкой должна быть спектральная полоса $\Delta\lambda$ излучения квазимонохроматического источника, чтобы относительный сдвиг фаз световых волн, прошедших через щели не превышал π во всей полосе $\Delta\lambda$?

Решение. Фазовый сдвиг, возникающий при прохождении света через стеклянную пластинку, составляет $\varphi = 2\pi nl/\lambda$. Излучение от второй щели проходит то же расстояние в воздухе и его фазовый сдвиг составляет $\varphi = 2\pi l/\lambda$. Таким образом, наличие стеклянной пластинки приводит к удлинению оптического пути в n раз. Разность оптических путей составляет $(n-1)l = 0.5$ мм, что соответствует запаздыванию в 1000 длин волн при $\lambda = 500$ нм. Заметим, что для заданной длины волны излучения наличие стеклянной пластинки не приводит к изменению интерференционной картины, так как относительный фазовый сдвиг световых пучков кратен 2π.

Будем считать щели интерферометра точечными источниками и используем результаты решения примера 7.2. Для произвольной точки экрана наблюдения с координатой y относительно оптической оси системы разность фаз световых волн, приходящих от щелей составляет $\Delta\varphi_1 = \dfrac{2\pi yd}{\lambda L}$. Пусть спектральная ширина излучения источника мала $\Delta\lambda << \lambda$ (условие квазимонохроматичности). Тогда, для спектральной компоненты с длиной волны $\lambda + \Delta\lambda$ разность фаз составляет $\Delta\varphi_2 = \dfrac{2\pi yd}{L(\lambda + \Delta\lambda)}$. По условию задачи должно выполняться условие $\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_2 \le \pi$, которое обеспечивает возможность наблюдения интерференционной картины. При выполнении равенства произойдет наложение максимумом и минимумов интерференционных картин, соответствующих спектральным компонентам с длинами волн λ и $\lambda + \Delta\lambda$, и, следовательно, существенное уменьшение контраста интерференционной картины. Подставляя выражения для разностей фаз и используя условие малости спектральной ширины источника, получаем $\dfrac{2\pi yd\Delta\lambda}{L\lambda^2} \le \pi$ или $\Delta\lambda \le \dfrac{L\lambda^2}{2yd}$. Проведем численную оценку. Пусть, например, при расстоянии до экрана L = 2 м и расстоянии между щелями d = 5 мм мы хотим наблюдать интерференционную картину в пределах пятна с максимальным размером $y = 5$ см. Тогда $\Delta\lambda \le 1$ нм. Видно, что условие возможности наблюдения интерференционной картины накладывает довольно жесткие ограничения на спектральную ширину источника. Оценка получена без учета стеклянной пластинки. Для спектральной компоненты с длиной волны $\lambda + \Delta\lambda$ наличие пластинки приводит к дополнительному относительному фазовому сдвигу, величина которого составляет

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{(\lambda + \Delta\lambda)} l(n-1) \approx \frac{2\pi l(n-1)}{\lambda}\left(1 - \frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right) = \Delta\varphi_0 - \Delta\varphi_0\frac{\Delta\lambda}{\lambda},$$

где (как было показано) $\Delta\varphi_0 = 2000\pi$. По условию задачи должно выполняться условие $\Delta\varphi_0 \dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} \le \pi$ или $\Delta\lambda \le \lambda / 2000 = 0.25$ нм.

Пример 7.4. Реальный линейный источник квазимонохроматического света с длиной волны λ = 500 нм имеет ширину a = 1 мм. Как далеко от экрана с двумя щелями (расстояние между щелями d = 2 мм) нужно поместить источник, чтобы две щели можно было считать когерентными источниками?

Решение. Рассмотрим симметричную конфигурацию, когда оптическая ось системы проходит через середину линейного источника и через точку экрана, лежащую посередине между щелями. Обозначим расстояние между источником и экраном с щелями L, а расстояние между экраном с щелями и экраном, на котором будем наблюдать интерференционную картину l. Реальный линейный источник можно представить в виде совокупности точечных некогерентных источников. Пусть какой-либо из этих точечных источников имеет координату x ($-a/2 \le x \le a/2$). Рассмотрим две волны, исходящие из такого точечного источника, которые проходят через разные щели и попадают в одну и ту же точку экрана наблюдения. Пусть точка наблюдения находится на экране в плоскости, перпендикулярной щелям, и отстоит на y от точки пересечения оптической оси с этим экраном. Разность хода для этих двух волн δ зависит от координаты x рассматриваемого источника и при условии $x, y, d << l, L$ равна:

$$\delta(x) = \frac{d \cdot x}{L} + \frac{d \cdot y}{l}$$

(см. Пример 7.2). Волны, испускаемые рассматриваемым точечным источником, создают на экране наблюдения интерференционную картину, распределение интенсивности в которой дается выражением:

$$I = 2I_0\left(1 + \cos k\delta(x)\right)$$

где I_0 – интенсивность точечного источника.

Точечные источники, составляющие линейный источник, не когерентны. Поэтому распределение интенсивности на экране наблюдения представляет собой сумму интенсивностей в интерференционных картинах, которые образуют в некоторой точке y на экране все точечные источники, расположенные на линейном источнике. Поэтому полная интенсивность в интерференционной картине пропорциональна следующему интегралу:

$$I(y) \sim \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 + \cos k\delta(x)\right) dx = \int_{-a/2}^{a/2} \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\left(\frac{x}{L} + \frac{y}{l}\right)\right)\right) dx .$$

Здесь мы предполагаем, что интенсивности излучения всех точечных источников одинаковы, то есть линейный источник имеет равномерное распределение интенсивности. Раскрывая подынтегральное выражение по формуле косинуса суммы двух углов и производя интегрирование, получаем

$$I(y) \sim a + \cos\alpha y \int_{-a/2}^{a/2} \cos\beta x dx = a + \cos\alpha y \frac{2\sin(\beta a/2)}{\beta} = a\left(1 + \cos\alpha y \operatorname{sinc}\left(\frac{\beta a}{2}\right)\right)$$

где $\alpha = \frac{2\pi d}{\lambda l}$ и $\beta = \frac{2\pi d}{\lambda L}$.

Определим видимость интерференционной картины, создаваемой двумя щелями:

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \operatorname{sinc}\left(\frac{\beta a}{2}\right) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi d a}{2\lambda L}\right).$$

Известно, что для когерентных источников видимость интерференционной картины $V = 1$. Из полученного выражения видно, что при заданных d, a и λ видимость стремится к единице, если $L \to \infty$. Результат очевиден. При удалении на бесконечность от щелей реальный источник становятся точечным, а щели – когерентными источниками. При конечных значениях параметров задачи видимость всегда меньше единицы, то есть щели всегда являются частично когерентными источниками.

Высокая степень когерентности излучения щелей достигается в области, где видимость $V \sim 1$, то есть при выполнении условия:

$$\frac{\pi d a}{2\lambda L} << 1 \text{ или } L >> \frac{da}{\lambda}.$$

Подставляя численные значения, получаем оценку для расстояния L от линейного источника до экрана со щелями, при котором щели можно считать когерентными источниками и получать контрастную интерференционную картину: $L >> 4$ м.

Эту оценку можно получить и из простых качественных соображений. Рассмотрим две крайние точки линейного источника. Каждый из соответствующих точечных источников создает на экране наблюдения интерференционную картину. Распределения интенсивностей в этих картинах описываются приведенной выше формулой, которая для рассматриваемых источников принимает вид:

$$I_1 = 2I_0(1 + \cos k\delta_1) \text{ и } I_2 = 2I_0(1 + \cos k\delta_2),$$

где $\delta_1 = \frac{d \cdot a}{2L} + \frac{d \cdot y}{l}$ и $\delta_2 = -\frac{d \cdot a}{2L} + \frac{d \cdot y}{l}$. Если источник находится очень далеко от экрана ($L \to \infty$), то δ_1 и δ_2 практически равны, распределения I_1 и I_2 одинаковы, и мы наблюдаем четкую интерференционную картину. Однако, при уменьшении L интерференционная картина, создаваемая одним крайним источником смещается относительно картины другого. Ясно, что для расстояния L, при котором $\delta_1 - \delta_2 = \lambda/2$, максимумы одной интерференционной картины наложатся на минимумы другой интерференционной картины, и мы будем видеть равномерное распределение интенсивности. Отсутствие интерференции означает, что щели при таком освещении являются некогерентными источниками. Итак, из приведенных соображений следует, что высокая степень когерентности щелей достигается при выполнении неравенства:

$$\delta_1 - \delta_2 << \lambda/2 \text{ или } \frac{d \cdot a}{L} << \frac{\lambda}{2}.$$

Отсюда следует оценка для расстояния L от источника до щелей, которая лишь численным коэффициентом отличается от полученной выше.

Задания для самостоятельной работы[1]

7.5. (*1*) Показать, как меняется в пространстве и во времени вектор Умова-Пойнтинга $\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$ в плоской стоячей электромагнитной волне, образованной сложением двух бегущих навстречу друг другу гармонических волн равной амплитуды и длины волны.
<u>*Литература*</u>
Л.Н. Капцов, Физика элементов ЭВМ, М.: изд-во МГУ, 1983, гл. 3, § 11.

7.6. (*1*) Определить изменение в пространстве и во времени плотности электрической $w = \varepsilon\varepsilon_0 E^2$ и магнитной $w = \mu\mu_0 H^2$ энергии поля в плоской стоячей электромагнитной волне, образованной сложением двух бегущих навстречу друг другу гармонических волн равной длины волны и амплитуды.
<u>*Литература*</u>
Л.Н. Капцов, Физика элементов ЭВМ, М.: изд-во МГУ, 1983, гл. 3, § 11.

7.7. (*1*) Вдоль оси x бегут две плоские гармонические волны со скоростями распространения V_1 и V_2 (длины волн λ_1 и λ_2, соответственно). Найти:
1) расстояние Λ между двумя ближайшими точками в пространстве, в каждой из которых колебания в волнах совпадают по фазе,

[1] В скобках указана степень сложности задания, которая оценивается в баллах от 1 (наименьшая сложность) до 3 (наибольшая сложность).

2) скорость U перемещения точки, где колебания в волнах совпадают по фазе.

7.8. (*2*) Три колебания, происходящие вдоль одной и той же прямой, имеют одинаковые амплитуды и частоты. Какова средняя интенсивность суммарного колебания, если фазы колебаний:
1) независимы и случайным образом изменяются, принимая с равной вероятностью значения из интервала $[0, 2\pi]$,
2) независимы и случайным образом изменяются, принимая с равной вероятностью значения из интервала $[0, \pi]$,
3) не меняются во времени, причем два колебания синфазны, а третье антифазно по отношению к первым двум?
Литература
Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 4, §§ 11-14.
Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, гл. 9, §§ 9.1-9.3.

7.9. (*1*) Два точечных когерентных источника монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм находятся на расстоянии $L_1 = 1$ м друг от друга и на расстоянии $L_2 = 10$ м от плоской поверхности. Оценить размеры области на этой поверхности, в пределах которой при расчете интерференционной картины волны можно приближенно считать плоскими.
Литература
Л.Н. Капцов, Физика элементов ЭВМ, М.: изд-во МГУ, 1983, гл. 3, § 15.
Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 4, §§ 11-13.

7.10. (*2*) Из линзы с фокусным расстоянием $f = 50$ см вырезана центральная часть в виде узкой полоски шириной d. Обе половины линзы сдвинуты до соприкосновения. По одну сторону линзы на ее оси помещен точечный источник монохроматического света ($\lambda = 600$ нм). С противоположной стороны линзы помещен экран, на котором наблюдаются интерференционные полосы. Расстояние между соседними светлыми полосами $x = 0{,}5$ мм и не меняется при перемещении экрана вдоль оптической оси. Определить ширину d вырезанной полоски.
Литература
Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 4, §§ 11-16.
Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, гл. 9, §§ 9.1-9.3.

7.11. (*2*) Для наблюдения интерференционных полос используется билинза, изготовленная из линзы с фокусным расстоянием $f = 12$ см. Билинза представляет собой две половинки линзы, разрезанной по диаметру, которые раздвинуты на расстояние d = 1,1 мм. Источником света является щель, расположенная на расстоянии a = 20 см от оси билинзы. Экран перпендикулярен оси и находится на расстоянии L = 480 см от билинзы. Найти ширину интерференционных полос, если длина волны света λ = 610 нм.

<u>*Литература*</u>
Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 4, §§ 11-16.
Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, гл. 9, §§ 9.1-9.3.

7.12. (*2*) Каков должен быть диаметр D светящейся нити, которая используется в установке с билинзой (см. условие задачи 7.11), изготовленной из линзы с фокусным расстоянием f = 12 см, чтобы получить отчетливую интерференционную картину? Половинки линзы раздвинуты на расстояние d = 1,1 мм. Нить находится на расстоянии a = 50 см от билинзы. Экран находится на расстоянии L = 480 см от билинзы. Длина волны света λ = 610 нм.

<u>*Литература*</u>
Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 4, §§ 11-17.
Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, гл. 9, §§ 9.1-9.4.

7.13. (*2*) Двойная щель (расстояние между щелями d = 0,5 мм) облучается параллельным пучком света от гелий-неонового лазера, который дает излучение, близкое к монохроматическому с длиной волны λ = 632,8 нм. Каково расстояние l между интерференционными полосами на экране, находящемся на расстоянии L = 5 м от щели? Как качественно изменится интерференционная картина, если одну из щелей периодически закрывать с частотой ν = 100 Гц, так что интенсивность света, проходящего через нее, меняется по закону $I = 0{,}5 I_0 \left(1 + \cos(2\pi\nu t)\right)$?

<u>*Литература*</u>
Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 4, §§ 11-16.
Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, гл. 9, §§ 9.1-9.3.

7.14. (*2*) Интерферометр Фабри-Перо состоит из двух стеклянных или кварцевых пластинок с плоскими поверхностями. Внутренние поверхности пластин параллельны, они покрыты частично прозрачными пленками с высокой отражательной способностью. В результате, воздух, заключенный между этими поверхностями, образует плоско-параллельную пластинку.

Плоская световая волна падает на интерферометр почти нормально. Определить условие максимума для света с длиной волны λ, если заданы угол падения световой волны на интерферометр α и расстояние между пластинами h. Оценить в радианах угловое расстояние между максимумами в зависимости от порядка интерференции m для линий излучения паров натрия λ_1 = 589,0 нм и λ_2 = 589,6 нм, если h = 20 см и m = 2, 10, 20.

Литература

Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 4, §§ 11-15, гл. 7, §§ 30.

7.15. (*1*) Радиоизлучение космического источника на длине волны λ принимает горизонтальный вибратор, расположенный на отвесном берегу на высоте h над уровнем моря. Рассматривая поверхность воды как плоское зеркало, определить зависимость интенсивности принимаемого сигнала от угла α возвышения источника над горизонтом. Упростить полученное выражение для случая малых величин угла α.

7.16. (*2*) Свет от точечного источника падает на маленькую слюдяную пластинку толщиной h = 0,1 мм с показателем преломления n = 1,4. Расстояние от источника до пластинки L = 1 м, угол падения света $\vartheta \approx 60°$. На таком же расстоянии от пластинки расположен экран, ориентированный перпендикулярно волновому вектору волны, отраженной от верхней грани пластинки. Найти порядок интерференционного максимума в центре экрана и ширину интерференционных полос.

7.17. (*2*) Между двумя плоско-параллельными стеклянными пластинками находится тонкая проволока. Расстояние между проволокой и линией соприкосновения пластинок l = 7,36 см. Каков диаметр проволоки, если при нормальном падении монохроматического света с длиной волны λ = 540 нм на нижней поверхности наблюдаются интерференционные полосы шириной 2 мм?

7.18. (*1*) Две параболоидные чаши радиотелескопа расположены на расстоянии L = 480 м. Чаши концентрируют излучение в общем приемнике, находящемся на равном расстоянии от чаш. Приемник регистрирует величину, пропорциональную интенсивности суммарного излучения. С какой угловой точностью измеряется направление на звезду, если можно надежно зафиксировать уменьшение интенсивности на 10% от максимальной величины. Длина волны излучения λ = 0,5 м. Размеры чаш пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием между ними.

7.19. (*2*) Оценить длину и время когерентности излучения рубинового лазера, если основная часть энергии излучения сосредоточена в спектральном интервале шириной 10^6 Гц. Длина волны излучения λ = 693 нм.

7.20. (*2*) Используя теорему Винера-Хинчина, определить видимость интерференционной картины в зависимости от разности хода δ (запаздывания τ) в интерферометре Майкельсона, если излучение источника имеет вид

$$\xi(x=0,t) = a_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\vartheta^2} + i\omega t\right); \quad \frac{2\pi}{\omega} << \vartheta .$$

<u>*Литература*</u>

Д.В. Сивухин, Общий курс физики. Оптика, М.: Наука, 1980, § 31.

7.21. (*2*) Разность хода в плечах интерференционной картины δ. Найти видимость интерференционной картины, если линия испускания источника света имеет прямоугольную форму в интервале шириной $\Delta\omega$ около ω_0. Спектр излучения взять в виде

$$S(\omega) = \begin{cases} a, & \omega_0 - \Delta\omega/2 \le \omega \le \omega_0 + \Delta\omega/2 \\ 0, & \omega < \omega_0 - \Delta\omega/2 \text{ и } \omega > \omega_0 + \Delta\omega/2 \end{cases},$$

где $\Delta\omega << \omega_0$ и $a = I_0/\Delta\omega$ (I_0 – интенсивность излучения).

7.22. (*2*) Найти разность $\Delta\lambda$ для *D*-линий излучения натрия, если при наблюдении интерференционных полос равной ширины в воздушном клине интерференционная картина исчезает первый раз при толщине d = 0,15 мм. Принять $\Delta\lambda << \lambda_0$, где λ_0 = 0,59 мкм.

<u>*Литература*</u>

Н.И. Калитиевский, Волновая оптика, 1978, § 5.6.

Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, § 25.

§8. Многолучевая интерференция. Радиотелескопы

Краткие теоретические сведения

В предыдущем параграфе была рассмотрена интерференция волн, испускаемых двумя источниками. Было показано, что результатом интерференции является пространственное перераспределение интенсивности. При интерференции двух волн равной амплитуды результирующая интенсивность изменяется по гармоническому закону (7.8) в зависимости от разности фаз φ от минимального значения $I_{\min} = 0$ до максимального $I_{\max} = 4I_0$.

При интерференции излучения цепочки синфазных источников также происходит пространственное перераспределение интенсивности. При этом оказывается, что подбором параметров системы излучателей можно добиться концентрации излучаемой энергии в сравнительно узком угловом интервале. Эта особенность многолучевой интерференции используется в радиолокаторах и радиотелескопах. Радиолокаторы облучают удаленные объекты и регистрируют отраженное (рассеянное) ими излучение. Таким способом определяются координаты и угловые размеры самолетов, ракет, спутников и других объектов в атмосфере. Ясно, что интенсивность сигнала будет тем больше, чем в меньший угол радиолокатор сможет сконцентрировать зондирующее излучение. Радиотелескопы регистрируют излучение звезд, галактик и других космических тел. Разрешающая способность радиотелескопа, то есть возможность различать объекты, находящиеся на малом угловом расстоянии друг от друга, зависит от угловой шириной его диаграммы направленности. Ширина диаграммы направленности $\Delta\vartheta$ радиолокатора и радиотелескопа определяется интерференцией сигналов, излучаемых и принимаемых отдельными приемниками, из которых состоят эти системы.

Рассмотрим цепочку (антенну) из N синфазных гармонических излучателей, расположенных вдоль одной прямой на расстоянии d друг от друга. Пусть точка наблюдения удалена от антенны на расстояние r, которое много больше, чем полная длина антенны $D = (N-1)d$. При этом можно считать, что прямые, проведенные через каждый из излучателей и точку наблюдения, практически параллельны. Пусть ϑ угол между этими прямыми и перпендикуляром к линии, на которой расположены источники.

Тогда суммарное поле в точке наблюдения, определяемое суперпозицией полей всех источников, представимо в виде

$$E = A(r)\exp(i(\omega t - kr))\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left(-inkd\sin\vartheta\right) = A(r,\vartheta)\exp(i(\omega t - kr)) \qquad (8.1)$$

Это выражение можно рассматривать как поле в бегущей волне, распространяющейся от одного источника – антенны. Видно, что амплитуда $A(r,\vartheta)$ этой волны зависит не только от расстояния r, но и от угла ϑ. Появление этой угловой зависимости связано с фазовым сдвигом $\Delta\varphi_{i,i+1}$ между волнами соседних i-го и (i+1)-го источников. Действительно, расстояние от i-го источника до точки наблюдения отличается от такого же расстояния для (i+1)-го источника на величину $d\sin\vartheta$, и сдвиг фазы для волн этих источников равен $\Delta\varphi_{i,i+1} = kd\sin\vartheta$.

Легко показать, что угловое распределение результирующей интенсивности I, пропорциональной квадрату модуля напряженности суммарного поля от N эквидистантных синфазных источников, определяется выражением

$$I \sim I_0 \sin^2\left(\frac{Nkd\sin\vartheta}{2}\right)\Bigg/\sin^2\left(\frac{kd\sin\vartheta}{2}\right); \quad I_0 \sim |A|^2. \qquad (8.2)$$

Угловое положение главных максимумов интенсивности, в которых $I \sim N^2 I_0$, согласно этой зависимости, определяется соотношением:

$$d\sin\vartheta_{\max} = \lambda n, \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (8.3)$$

Интенсивность обращается в ноль при наблюдении излучения цепочки под углами $\vartheta_{\min}$, которые находятся из условия:

$$Nd\sin\vartheta_{\min} = \lambda p, \text{ где } p = \pm 1, \pm 2, \ldots, \ p \neq Nq \text{ и } q = 1, 2, \ldots \qquad (8.4)$$

Условие (8.4) можно переписать в виде:

$$d\sin\vartheta_{\min} = \lambda(n \pm s/N), \text{ где } n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad s = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(N-1) \qquad (8.5)$$

Ноли интенсивности, ближайшие к главному максимуму n-го порядка ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), имеют место слева при угле ϑ_n^-, который определяется условием $d\sin\vartheta_n^- = \lambda(n - 1/N)$, и справа при угле ϑ_n^+, для которого $d\sin\vartheta_n^+ = \lambda(n + 1/N)$. За угловую ширину главных максимумов $\Delta\vartheta$

принимается величина, равная половине углового расстояния между ближайшими минимумами:

$$\Delta\vartheta = (\vartheta_n^{+} - \vartheta_n^{-})\big/2\,. \qquad (8.6)$$

Отсюда, угловая ширина диаграммы направленности антенны радиолокатора и радиотелескопа при $N >> 1$ и малых углах $\vartheta << 1$ равна:

$$\Delta\vartheta \approx \frac{\lambda}{Nd} \qquad (8.7)$$

Угловую ширину диаграммы направленности можно с хорошей точностью оценить при помощи формулы:

$$\Delta\vartheta \approx \lambda / D, \qquad (8.8)$$

где $D \approx Nd$ – поперечный размер антенны с большим числом ($N >> 1$) излучателей или приемников.

Примеры решения задач

Пример 8.1. Многолучевой радиоастрономический телескоп представляет собой линейную цепочку из $N = 32$ приемников, находящихся на расстоянии $d = 7$ м друг от друга и работающих на длине волны $\lambda = 21$ см. Найдите угловую ширину центрального максимума диаграммы направленности и угловое расстояние между главными соседними максимумами. Как надо изменить N или d, чтобы вдвое уменьшить ширину центрального максимума?

Решение. Космические источники, излучение которых регистрируется радиотелескопом, находятся на столь большом расстоянии от Земли, что их излучение в точке приема с хорошей точностью можно представить плоской волной. Если источник располагается строго в зените, то фронт плоской электромагнитной волны параллелен прямой линии, на которой лежат приемники, и сигналы, регистрируемые приемниками, совпадают по фазе. Из геометрии задачи следует, что, если источник смещен на угол ϑ относительно зенита, то волна, приходящая на i-ый приемник сдвинута по фазе относительно волны, приходящей на (i-1)-ый приемник на $kd\sin\vartheta$ ($k = 2\pi/\lambda$). Суммирование смещенных по фазе сигналов, приводит к выражению $\sum\limits_{n=0}^{N-1}\exp(-inkd\sin\vartheta)$. Вычисляя сумму по формуле суммы членов геометрической прогрессии, получаем, что сигнал пропорционален $\dfrac{1-\exp(iNkd\sin\vartheta)}{1-\exp(ikd\sin\vartheta)}$. Произведем тождественное преобразование:

$$\frac{1-\exp(iNkd\sin\vartheta)}{1-\exp(ikd\sin\vartheta)}=\exp\left(\frac{i(N-1)kd\sin\vartheta}{2}\right)\frac{\sin\left(\dfrac{Nkd\sin\vartheta}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{kd\sin\vartheta}{2}\right)}.$$

Регистрируемая интенсивность пропорциональна квадрату модуля этого выражения, и результирующая интенсивность пропорциональна следующей величине:

$$I\sim\sin^2\left(\frac{Nkd\sin\vartheta}{2}\right)\Big/\sin^2\left(\frac{kd\sin\vartheta}{2}\right).$$

Это соотношение и определяет диаграмму направленности радиотелескопа. Видно, что главные максимумы диаграммы направленности соответствуют углам ϑ, определяемым условием $\dfrac{kd\sin\vartheta}{2}=\pi n$, где $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ – целое число. Отсюда, $\sin\vartheta_{\max}=\dfrac{2\pi n}{kd}=n\dfrac{\lambda}{d}$. По условию задачи $\lambda<<d$, поэтому угловое расстояние между главными максимумами с небольшими номерами n составляет:

$$\Delta\varphi_{\max}=\lambda/d\ .$$

Подставляя численные значения, находим $\Delta\varphi_{\max}=\lambda/d$ = 0,03 рад ≈ 1,8°.

Ширину центрального максимума определим как угловое расстояние между точками, где интенсивность в первый раз обращается в ноль: $\dfrac{Nkd\sin\vartheta}{2}=\pm\pi$. Отсюда угловые координаты максимумов справа и слева от центрального максимума соответственно равны: $\vartheta^+\approx\dfrac{2\pi}{Nkd}=\dfrac{\lambda}{Nd}$ и $\vartheta^-\approx-\dfrac{\lambda}{Nd}$. Ширина центрального максимума диаграммы направленности определяется условием: $\Delta\vartheta=\vartheta^+-\vartheta^-$. Отсюда следует, $\Delta\vartheta\approx\dfrac{2\lambda}{Nd}$.

Подставляя численные значения, находим, что угловая ширина диаграммы направленности рассматриваемого телескопа равна:

$$\Delta\varphi \approx \frac{2 \cdot 0{,}21\,\text{м}}{32 \cdot 7\,\text{м}} \approx 0{,}002\ \text{рад} \approx 0{,}1°.$$

Заметим, что величина Nd с хорошей точностью равна полной длине радиотелескопа.

Таким образом, при заданной длине волны излучения, угловое расстояние между главными максимумами обратно пропорционально расстоянию между соседними приемниками, а угловая ширина центрального максимума, определяющая угловое разрешение радиотелескопа, приблизительно обратно пропорциональна поперечному размеру всей антенны радиотелескопа. Для того чтобы вдвое сузить диаграмму направленности, необходимо либо вдвое увеличить число приемников при неизменном расстоянии между ними, либо разместить те же приемники на вдвое большем относительном расстоянии.

Пример 8.2. Одномерная решетка состоит из $3M$ равноотстоящих идентичных синфазных вибраторов, расположенных на одной прямой. Как изменится диаграмма направленности, если убрать 1) каждый второй и 2) каждый третий вибратор? Рассматривать дальнее поле излучения.

Решение. Воспользуемся результатами, полученными при решении Примера 8.1. В первом варианте (удален каждый второй вибратор) результирующая решетка имеет ту же полную длину, что и исходная, а расстояние между вибраторами в ней в два раза больше, чем в исходной. Ширина диаграммы направленности, зависящая от полной длины решетки не изменится, а угловое расстояние между главными максимумами уменьшится в два раза в соответствии с формулой $\Delta\varphi_{\max} = \dfrac{\lambda}{2d}$.

Во втором случае получаем решетку с переменным шагом. Повторяя рассуждения, использованные в Примере 8.1, получаем следующую сумму для смещенных по фазе волн:

$$1 + \exp(-ikd\sin\vartheta) + \exp(-i3kd\sin\vartheta) + \exp(-i4kd\sin\vartheta) +$$
$$+ \exp(-i6kd\sin\vartheta) + \exp(-i7kd\sin\vartheta) + \ldots =$$
$$= \sum_{m=0}^{M-1} \exp(-i3mkd\sin\vartheta) + \exp(-ikd\sin\vartheta)\sum_{l=0}^{M-1}\exp(-i3lkd\sin\vartheta) =$$
$$= \frac{1-\exp(-i3Mkd\sin\vartheta)}{1-\exp(-i3kd\sin\vartheta)}\left(1+\exp(-ikd\sin\vartheta)\right).$$

Применяя тот же, что и в предыдущем примере, метод преобразования полученного выражения находим, что для всей решетки угловое распределение интенсивности определяется соотношением

$$I \sim \cos^2\left(\frac{kd\sin\vartheta}{2}\right)\sin^2\left(\frac{3Mkd\sin\vartheta}{2}\right)\Big/\sin^2\left(\frac{3kd\sin\vartheta}{2}\right),$$

где ϑ – угол между нормалью к решетке и направлением на точку наблюдения. Отношение квадратов синусов описывает решетку с полной длиной $3Md$ и расстоянием между вибраторами $3d$. Диаграмма направленности такой решетки представляет собой периодическую последовательность главных максимумов, угловое положение которых определяется выражением $\sin\vartheta_{\max} = n\dfrac{\lambda}{3d}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Угловое расстояние между главными максимумами с небольшими номерами n составляет $\Delta\varphi_{\max} = \dfrac{\lambda}{3d}$. Таким образом, это расстояние уменьшается в три раза по сравнению с исходной решеткой. Ширина центрального максимума диаграммы направленности определяется выражением $\Delta\vartheta \approx \dfrac{2\lambda}{3Md}$ и не изменяется по сравнению с исходной решеткой. Принципиальным отличием решетки с переменным шагом является наличие дополнительной модуляции интенсивности по закону $\cos^2\left(\dfrac{kd\sin\vartheta}{2}\right)$. Неизменной остается интенсивность главных максимумов, для которых $\sin\vartheta = j\lambda/d$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Этому условию удовлетворяют нулевой, третий, шестой и т.д. главные максимумы. Интенсивности первого и второго главных максимумов (а также 4-го, 5-го, 7-го, 8-го и т.д.) убывают в четыре раза, так как $\cos^2\left(\dfrac{kd}{2}\dfrac{\lambda}{3d}\right) = \cos^2\left(\dfrac{kd}{2}\dfrac{2\lambda}{3d}\right) = \cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Задания для самостоятельной работы[1]

8.3. (*2*) Радиотелескоп Сибирского отделения Российской Академии наук в Саянах состоит из 256 параболоидов, эквидистантно расположенных на

---

[1] В скобках указана степень сложности задания, которая оценивается в баллах от 1 (наименьшая сложность) до 3 (наибольшая сложность).

двух взаимно перпендикулярных прямых линиях, которые образуют правильный крест на земной поверхности. Размах креста, равный расстоянию между крайними параболоидами на одной линии, составляет 622 м. Сигналы с параболоидов суммируются без дополнительного сдвига фаз в приемнике, который определяет интенсивность суммарного сигнала. Радиотелескоп работает на длине $\lambda = 0{,}5$ м. Найти угловое разрешение телескопа для угла, близкого к зенитному, в следующих сечениях:

1) в плоскости, проходящей через одну из линий, составляющих крест,

2) в плоскости, проходящей через "диагональ" креста, то есть прямую, лежащую на поверхности и составляющую углы 45° с линиями, образующими крест.

8.4. (*3*) Сотовая связь в стандарте GSM-1800 работает на прием на частоте 925 МГц. Антенна базовой станции представляет собой вертикальный набор синфазных излучателей, общая длина которого $L = 4{,}5$ м. Мощность, подводимая к антенне, $P = 5$ Вт. Рассчитать максимальное расстояние, на котором возможен прием сообщений по сотовому телефону, если его чувствительность, то есть минимальная принимаемая интенсивность, составляет 10^{-14} Вт/см^2. Определить напряженность электрического и магнитного полей у антенны телефона для этого расстояния и у антенны базовой станции. Рассчитать, насколько сокращается дальность приема в следующих условиях:

1) телефон плотно прижат к уху абонента, и его чувствительность падает на 2 дБ из-за экранирования головой абонента,

2) телефона находится в автомобиле, где чувствительность падает на 6 дБ из-за экранировки кузовом,

3) телефон находится в здании, где чувствительность падает на 9 дБ.

8.5. (*2*) Точечные монохроматические синфазные источники, составляющие антенную решетку, расположены цепочками на двух параллельных прямых линиях. Антенна содержит $2N$ источников, где N – число источников на каждой линии. Расстояние между источниками в пределах одной цепочки – d, а расстояние между цепочками – l. Относительного смещения цепочек вдоль линий нет. Как будет изменяться диаграмма направленности антенны в плоскости, проходящей через источники, если

1) расстояние d между источниками в цепочке изменяется в пределах от $0{,}1\lambda$ до 2λ при $l = const$;

2) расстояние l между цепочками изменяется в пределах от 0,1λ до 2λ при $d = const$ (λ – длина волны излучения).
Нарисуйте примерный вид диаграммы направленности при $d = l = \lambda$ и $N = 4$.
Литература
Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, гл. 9, § 9.6.
Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 9, § 46.

8.6. (*2*) Точечные монохроматические синфазные источники, составляющие антенную решетку, расположены на двух параллельных прямых линиях. Антенна содержит $2N$ источников (N источников на каждой линии). Расстояние между источниками в пределах одной цепочки – d, а расстояние между цепочками – l. Относительного смещения цепочек вдоль линий нет. Какой вид имеет диаграмма направленности системы в плоскости, проходящей через источники, если l = 0,5λ; λ; 1,5λ; 2λ (λ – длина волны излучения). Рассмотреть отдельно случаи $d > \lambda$ и $d < \lambda$.
Литература
Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, гл. 9, § 9.6.
Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 9, § 46.

8.7. (*2*) Электроны в длинной тонкой прямой проволоке длиной L колеблются вдоль проволоки в одинаковой фазе с частотой ω и малой амплитудой $a << L$. Рассматривая каждый электрон как элементарный излучающий диполь, найти электрическое поле, создаваемое всеми электронами на большом расстоянии $R >> L$ от проволоки в направлении, составляющем угол ϑ с проволокой.
Литература
Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 9, § 39.

8.8. (*2*) Три точечных синфазных излучателя расположены вдоль прямой. Расстояние между первыми двумя равно $\lambda/2$ (λ – длина волны излучения). Расстояние между вторым и третьим излучателями равно $3\lambda/4$. Амплитуды первых двух излучателей одинаковы. Какова должна быть амплитуда третьего излучателя, чтобы в диаграмме направленности системы существовали минимумы нулевой интенсивности? Найти направления на эти минимумы. Решить задачу при расстояниях 2λ и 4λ, соответственно.
Литература
Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука, 1976, гл. 4, § 13.
Ф. Крауфорд, Волны, М.: Наука, 1974, гл. 9, § 9.2.

8.9. (*3*) Точечные монохроматические источники, составляющие антенную решетку, расположены на двух параллельных прямых линиях. Антенна содержит $2N$ источников (N источников на каждой линии). Расстояние между источниками в пределах одной цепочки – $\lambda/2$, а расстояние между цепочками – $\lambda/4$, где λ – длина волны излучения. Относительного смещения цепочек вдоль линий нет. Все излучатели первой линии синфазны, а излучатели второй линии опережают их по фазе на $\pi/2$. Найти изменение интенсивности в плоскости источников в зависимости от угла ϑ, отсчитываемого от прямой, перпендикулярной линиям антенной решетки.

8.10. (3) Сотовая связь в стандарте GSM 1800 работает на передачу на длине волны 0,34 м. Антенна базовой станции представляет собой вертикальный набор из пяти эквидистантно расположенных излучателей, общая длина которого $L = 4{,}5$ м. Высота антенны над поверхностью земли $D = 50$ м. Суммарная мощность излучения антенны 5 Вт. Определить угловую ширину диаграммы направленности антенны, приняв, что на расстоянии $Z = 10$ км интенсивность на границе диаграммы составляет $I = 10^{-14}$ Вт/см^2. Найти фазовый сдвиг между соседними излучателями антенны, при котором диаграмма направленности с такой угловой шириной перекрывает наибольшую площадь на поверхности земли в круге радиусом 10 км.

§9. Дифракция волн

Краткие теоретические сведения

Под дифракцией понимают всякое отклонение от прямолинейного распространения волн, которое нельзя объяснить как результат их отражения или преломления.

Скалярная задача дифракции сводится к решению волнового уравнения (1.1) для возмущения $\xi(\mathbf{r},t)$ с граничными условиями, задаваемыми на экранах и поверхности препятствий, вызывающих дифракцию. Волновое уравнение является линейным и для возмущения $\xi(\mathbf{r},t)$ справедливо представление в виде разложения Фурье по гармоническим монохроматическим волнам:

$$\xi(\mathbf{r},t)=\int_{-\infty}^{+\infty} E_\omega(\mathbf{r})\, e^{i\omega t}\, d\omega. \qquad (9.1)$$

Из (1.1) и (9.1) и условия ортогональности гармоник Фурье следует уравнение Гельмгольца для амплитуды гармонической волны $E_\omega(\mathbf{r})$ на частоте ω:

$$\Delta E_\omega(\mathbf{r})+k^2E_\omega(\mathbf{r})=0\,. \qquad (9.2)$$

Приближенная теория дифракции

Применяя к (9.2) вторую формулу Грина (*А.Н.Тихонов, А.А.Самарский, Уравнения математической физики*), получаем интегральную формулу Гельмгольца-Кирхгофа для амплитуды $E_\omega(P)$ в точке наблюдения P [1]:

$$E(P)=\frac{1}{4\pi}\oint_\Sigma\left(E\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial E}{\partial n}\right)d\Sigma\,, \qquad (9.3)$$

где $G=\frac{1}{r}e^{-ikr}$ – функция Грина для точечного источника, $\mathbf{n}$ – внутренняя нормаль к произвольной замкнутой поверхности Σ, охватывающей точку наблюдения P. В (9.3) неизвестно поле E, как в точке P, так и на поверхности Σ, и это выражение является интегральным уравнением.

[1] Здесь и далее не указывается символ ω у амплитуды гармоники.

Для задачи о дифракции волны на экране с отверстием удобно рассматривать поверхность Σ в виде бесконечного экрана с отверстием и полусферы с центром в этом отверстии. В такой постановке нетрудно получить условие излучения Зоммерфельда. Согласно этому условию для точки P, находящейся на конечном расстоянии от экрана, вклад в интеграл (9.3) результата интегрирования по полусферической поверхности, охватывающей P, равен нулю при стремлении радиуса этой сферы к бесконечности. С учетом условия Зоммерфельда областью интегрирования Σ в (9.3) является экран с отверстием:

$$\Sigma = \Sigma_{\text{отв}} + \Sigma_{\text{экран}}. \tag{9.4}$$

В соответствии с приближениями Кирхгофа поле на экране тождественно равно нулю, а в отверстии совпадает с невозмущенным полем, которое было бы в отсутствии экрана. В результате интегральное уравнение (9.3) становится формулой в виде интеграла от известного выражения, вычисляемого по поверхности отверстия $\Sigma_{\text{отв}}$:

$$E(P) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_{\text{отв}}}\left(E_S(M)\frac{\partial G(M)}{\partial n} - G(M)\frac{\partial E_S(M)}{\partial n}\right)d\Sigma_{\text{отв}}, \tag{9.5}$$

где $E_S(M)$ – поле источника волны в точке интегрирования M, находящейся в отверстии, а $G(M)$ – функция Грина для этой точки.

В оптическом приближении принимается, что длина волны λ много меньше расстояний r_0 и r от экрана до источника и до точки наблюдения, соответственно:

$$\lambda << r_0, r. \tag{9.6}$$

В этом приближении интеграл Гельмгольца–Кирхгофа (9.3) принимает вид выражения, называемого формулой Френеля–Кирхгофа:

$$E(P) = \frac{ik}{4\pi}\int\limits_{\Sigma_{\text{отв}}} E_S(M)\frac{e^{-ikr}}{r}(\cos\alpha - \cos\beta)d\Sigma_{\text{отв}}, \tag{9.7}$$

где $E_S(M) = A\dfrac{e^{-ikr_0}}{r_0}$ – комплексная амплитуда сферической волны, создаваемой точечным источником S в точке интегрирования M, α – угол между внутренней нормалью $\mathbf{n}$ к поверхности отверстия и радиус-вектором $\mathbf{r}_0$, проведенным из источника S в точку интегрирования M, β – угол между нормалью $\mathbf{n}$ и радиус-вектором $\mathbf{r}$, проведенным из точки наблюдения P в точку интегрирования M.

Принцип Гюйгенса-Френеля

Принцип Гюйгенса-Френеля позволяет аналитически вычислить искомую амплитуду $E(P)$, определяемую интегралом (9.7). Для этого поверхность волнового фронта в отверстии разбивается на зоны таким образом, что расстояние от точки наблюдения P до каждой следующей границы, разделяющей зоны, увеличивается на $\lambda/2$. В случае дифракции волны точечного источника на круглом отверстии зоны имеют вид поверхности шаровых слоев, с радиусом основания R_n, равным:

$$R_n = \sqrt{n\lambda \frac{\rho r_0}{\rho + r_0}}, \qquad (9.8)$$

где $n = 1, 2, ..., N$ – номер зоны Френеля, N – число открытых зон, ρ – кратчайшее расстояние от точки наблюдения P до первой зоны с $n = 1$, r_0 – радиус сферического волнового фронта, построенного с центром в источнике S так, что его поверхность касается границ кругового отверстия. Согласно принципу Гюйгенса-Френеля амплитуда дифрагировавшей волны в точке P равна сумме возмущений E_n, создаваемых зонами Френеля:

$$E(P) = \sum_{n=1}^{N} E_n . \qquad (9.9)$$

Комплексная амплитуда E_n возмущения n-ой зоны Френеля равна:

$$E_n = A\frac{e^{-ik(\rho + r_0)}}{\rho + r_0} K_n (-1)^n . \qquad (9.10)$$

Фактор K_n медленно убывает с ростом номера зоны n. Поэтому для комплексных амплитуд E_n справедливо неравенство

$$|E_{n+1}| < |E_n| . \qquad (9.11)$$

Представление $E(P)$ в виде суммы знакочередующегося сходящегося ряда позволяет определить распределение интенсивности $I(P) = |E(P)|^2$ в пространстве при дифракции волны на отверстии.

Дифракция Френеля

Приближение Френеля применимо, если поперечный размер b отверстия или препятствия, на котором происходит дифракция, и смещение

R_P точки P от оси в плоскости наблюдения малы по сравнению с продольными масштабами:

$$b,\, R_P << r_0, r, z\,, \tag{9.12}$$

где z – расстояние от экрана до точки наблюдения P. В этом случае углы $\alpha \approx 0$ и $\beta \approx \pi$, и в (9.7) можно положить $\cos\alpha \approx 1, \cos\beta \approx -1$. Кроме того, неравенство (9.12) позволяет заменить в пределах отверстия сферический волновой фронт на параболический, а расстояние r на z. В результате, в приближении Френеля амплитуда дифрагировавшей волны $E(x, y, z)$ в точке P, определяемой координатами x, y в плоскости наблюдения z, выражается следующим интегралом:

$$E(x,y,z) = \frac{ik}{2\pi z} e^{-ikz} \int\limits_{\Sigma_{\text{отв}}} E(x', y') \exp\left(-\frac{ik}{2z}\left((x-x')^2 + (y-y')^2 \right) \right) dx'dy' \tag{9.13}$$

Из (9.12) следует, что в приближении Френеля рассматриваются волны, распространяющиеся под малыми углами к оси OZ. Это приближение называют также приосевым (параксиальным). В соответствии с приосевым приближением амплитуду $E(x, y, z)$ можно представить следующим образом:

$$E(x, y, z) = A(x, y, z) e^{-ikz}\,. \tag{9.14}$$

Для комплексной амплитуды $A(x, y, z)$ дифракционная формула Френеля (9.13) принимает вид:

$$A(x,y,z) = \frac{ik}{2\pi z} \int\limits_{\Sigma_{\text{отв}}} A(x', y') \exp\left(-\frac{ik}{2z}\left((x-x')^2 + (y-y')^2 \right) \right) dx'dy' \tag{9.15}$$

Для комплексной амплитуды $A(x, y, z)$ справедливо параболическое уравнение дифракции:

$$2ik \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}\,. \tag{9.16}$$

Дифракции Френеля определяется условием: размер отверстия или препятствия сравним или в несколько раз превышает радиус R_1 первой зоны Френеля. Для плоской волны, падающей на препятствие ($\rho \to \infty$), это условие приводит к неравенству:

$$b \geq \sqrt{z\lambda}\,, \tag{9.17}$$

где b – радиус отверстия, а z – расстояние от него до точки наблюдения.

Эффект Тальбо

Эффект дифракционного самовоспроизведения светового поля с периодической модуляцией амплитуды в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, (эффект Тальбо) объясняется в рамках теории дифракции Френеля. Для этого можно использовать разложение комплексной амплитуды $A(x, y, z)$ светового поля в пространственный спектр Фурье. При одномерной периодической модуляции по оси OX комплексная амплитуда $A(x, z)$ волны, распространяющейся по оси OZ, представима в виде ряда Фурье:

$$A(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n(z) e^{ik_n z}, \tag{9.18}$$

где $k_n = 2\pi n/a$ – компонента волнового вектора, или частота пространственного спектра Фурье, a – период пространственной модуляции амплитуды $A(x, z)$. Амплитуды $A_n(z)$ гармоник пространственного спектра зависят от переменной z в направлении распространения волны. При $z = 0$ они согласно (4.23) равны:

$$A_n(0) = \frac{1}{a}\int_0^a A(x, z=0)\, e^{-ik_n x} dx, \tag{9.19}$$

где $A(x, z = 0)$ – комплексная амплитуда поля непосредственно за транспарантом, осуществляющим пространственную модуляцию.

Подстановка амплитуды $A(x, z)$ (9.18) в параболическое уравнение дифракции (9.16) для монохроматического поля и использование свойства ортогональности гармоник Фурье $e^{ik_n x}$ приводит к системе независимых обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $A_n(z)$:

$$2ik\frac{dA_n(z)}{dz} + k_n^{\ 2} A_n(z) = 0. \tag{9.20}$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число. Решение уравнения (9.20) имеет вид:

$$A_n(z) = A_n(0) e^{i\varphi_n(z)}. \tag{9.21}$$

где фаза $\varphi_n(z)$ равна:

$$\varphi_n(z) = \frac{k_n^{\ 2}}{2k} z \quad \text{или} \quad \varphi_n(z) = \frac{1}{2k}\left(\frac{2\pi}{a} n\right)^2 z. \tag{9.22}$$

Дифракционный набег фазы $\varphi_n(z)$, который приобретает n-ая гармоника пространственного спектра, пропорционален квадрату ее номера n и линейно возрастает с расстоянием z. Существует расстояние $z_{\text{Т}}$, называемое расстоянием Тальбо, на котором все амплитуды $A_n(z)$ пространственного спектра приобретают набег фазы, кратный 2π. Из (9.22) следует, что расстояние Тальбо $z_{\text{Т}}$, на котором набег фазы первой гармоники составляет $\varphi_1(z_{\text{Т}}) = 2\pi$, а всех последующих – $\varphi_n(z_{\text{Т}}) = 2\pi n^2$, равно:

$$z_{\text{Т}} = 2a^2/\lambda. \tag{9.23}$$

На расстоянии Тальбо $z_{\text{Т}}$ амплитуды $A_n(z = z_{\text{Т}})$ гармоник пространственного спектра оказываются равные своим значениям при $z = 0$. Это означает, что на расстоянии Тальбо световое поле $\xi(x, z_{\text{Т}}, t)$ в монохроматической волне восстанавливается. С точностью до фазового множителя поле $\xi(x, z_{\text{Т}}, t)$ совпадает с полем $\xi(x, z = 0, t)$ непосредственно за транспарантом, осуществляющим модуляцию. Действительно, из подстановки (9.18) в (9.14) и затем в выражение (9.1), записанное для монохроматической волны, следует:

$$\xi(x, z_{\text{Т}}, t) = \sum A_n(0)\exp\left(i\varphi_n z_{\text{Т}}\right)\exp\left(i(\omega t - kz_{\text{Т}} + k_n x)\right). \tag{9.24}$$

На расстоянии Тальбо распределение интенсивности $I(x, z_{\text{Т}})$, пропорциональное $\left|\xi(x, z_{\text{Т}})\right|^2$, совпадает с распределением $I(x, z = 0)$ непосредственно за транспарантом, то есть на этом расстоянии происходит самовоспроизведение изображения.

Существует кратный эффект Тальбо, при котором дифракционное воспроизведение светового поля с периодической модуляцией амплитуды происходит на расстояниях, кратных $z_{\text{Т}}$:

$$z_{\text{Т}}^{(s)} = s\, z_{\text{Т}}, \quad s = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9.25}$$

Дифракция плоских волн

Дифракция Фраунгофера, или дифракция плоских волн, имеет место, если размер отверстия или препятствия b, много меньше радиуса первой зоны Френеля:

$$b << \sqrt{z\lambda}\ . \qquad (9.26)$$

При дифракции Фраунгофера выражение (9.15) для амплитуды $A(x, y, z)$ принимает вид:

$$A(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z}\exp\left(-\frac{ik}{2z}(x^2 + y^2)\right)\int A(x', y')\exp\left(\frac{ik}{z}(xx' + yy')\right)dx'dy'. \qquad (9.27)$$

Дифракция Фраунгофера наблюдается на большом расстоянии от щели или в фокальной плоскости линзы.

Углы ϑ_x, ϑ_y, под которыми видна из центра отверстия точка x, y в плоскости наблюдения, малы, и их можно представить следующими отношениями:

$$\vartheta_x = x/z\,,\ \vartheta_y = y/z\ . \qquad (9.28)$$

Тогда компоненты волнового вектора для волны, распространяющейся в точку наблюдения x, y, равны:

$$k_x = k\vartheta_{x,}\ \ k_y = k\vartheta_y\ . \qquad (9.29)$$

Соотношения (9.28) и (9.29) позволяют в (9.27) перейти от координат x, y к переменным пространственного спектра k_x, k_y:

$$A(k_x, k_y) = const\int_{-\infty}^{+\infty} A(x', y')\exp i\left(k_x x' + k_y y'\right)dx'dy'\ . \qquad (9.30)$$

В случае дифракции Фраунгофера комплексная амплитуда волны $A(k_x, k_y)$ пропорциональна пространственному спектру амплитуды $A(x', y')$ в плоскости экрана.

Дифракция на щели

При нормальном падении плоской волны на щель угловое распределение интенсивности $I(\vartheta)$ в случае дифракции Фраунгофера пропорционально выражению:

$$I(\vartheta) \approx \sin^2\left(\frac{kb\sin\vartheta}{2}\right)\Bigg/\left(\frac{kb\sin\vartheta}{2}\right)^2, \qquad (9.31)$$

где b – ширина щели, ϑ – угол между нормалью к плоскости щели и направлением на точку наблюдения. Из (9.31) следует, что интенсивность

$I(\vartheta)$ обращается в нуль при углах дифракции ϑ_m, удовлетворяющих условию:

$$b\sin\vartheta_m = \pm m\lambda\,, \tag{9.32}$$

где $m = \pm 1, \pm 2, ...$ – порядок минимума, называемого основным. При малых углах дифракции ($\vartheta_m << 1$) условие основного минимума принимает вид:

$$\vartheta_m = \pm m\lambda/b\,. \tag{9.33}$$

Угловая ширина центрального максимума, определяемая как половина расстояния между основными минимумами первого порядка ($m = \pm 1$), составляет:

$$\Delta\vartheta = \lambda / b\,. \tag{9.34}$$

Это выражение определяет угол дифракционной расходимости $\Delta\vartheta_{\text{дифр}}$ волн при дифракции на щели. Для круглого отверстия диаметра D угол дифракционной расходимости равен

$$\Delta\vartheta_{\text{дифр}} = 1{,}22\lambda / D\,. \tag{9.35}$$

Дифракционная решетка

Амплитудная дифракционная решетка представляет собой набор эквидистантно расположенных щелей равной ширины. При дифракции Фраунгофера плоской волны, нормально падающей на решетку, угловое распределение интенсивности $I(\vartheta)$ определяется выражением:

$$I(\vartheta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\dfrac{kb\sin\vartheta}{2}\right)}{\left(\dfrac{kb\sin\vartheta}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\dfrac{Nkd\sin\vartheta}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{kd\sin\vartheta}{2}\right)}, \tag{9.36}$$

где b – ширина щелей, d – период решетки, N – число щелей. Формула (9.36) представляет собой произведение выражений (9.31) для распределения интенсивности при дифракции на щели шириной b и (8.2) для распределения интенсивности при многолучевой интерференции волн от N источников, эквидистантно расположенных на расстоянии d друг от друга.

Из анализа формулы (9.36) следуют соотношения для углов дифракции ϑ, при которых интенсивность достигает максимальных и минимальных значений.

Для главных максимумов $d\sin\vartheta_n = n\lambda$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – порядок главного максимума.

Для основных минимумов $b\sin\vartheta_m = \pm m\lambda$, где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ – порядок основного минимума.

Для дополнительных минимумов $Nd\sin\vartheta_p = p\lambda$, где $p = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm(N-1), \pm(N+1), \pm(N+2), \ldots$, $p \neq qN$, q – целое.

Так как $b < d$, то между основными минимумами укладывается несколько главных максимумов. Число щелей $N >> 1$, и между главными максимумами помещается много дополнительных минимумов.

Спектральная разрешающая способность R дифракционной решетки, определяемая как отношение длины волны λ к минимальному интервалу длин волн $\delta\lambda$, который можно зарегистрировать в спектре излучения с помощью решетки, определяется соотношением

$$R = \lambda/\delta\lambda = nN. \qquad (9.37)$$

Примеры решения задач

Пример 9.1. Параллельный пучок монохроматического света на длине волны λ = 600 нм падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметра D = 1,2 мм. На расстоянии b = 10 см за экраном на оси отверстия наблюдается темное пятно. На какое минимальное расстояние Δb нужно сместиться от этой точки, удаляясь от отверстия, чтобы в центре дифракционной картины вновь наблюдалось темное пятно?

Решение. При падении плоской волны на круглое отверстие радиус n-ой зоны Френеля определяется выражением $R_n = \sqrt{n\lambda z}$, где z – расстояние до точки наблюдения. Следовательно, в отверстии диаметра D помещается $n = \dfrac{D^2}{4\lambda z}$ зон Френеля. Используя данные задачи, получаем, что n = 6. По условию задачи точка наблюдения смещается так, что новое расстояние от нее до отверстия составляет $z + \Delta z$. Поскольку число зон Френеля обратно пропорционально расстоянию до точки наблюдения, теперь в пределах отверстия должно помещаться меньшее число зон. Очевидно, что новое число зон, соответствующее минимальной интенсивности света в точке наблюдения и минимальному смещению, составляет n' = 4. В соответствии с приведенной формулой число зон уменьшается в полтора раза, если расстояние до точки наблюдения увеличивается в полтора раза. Отсюда следует, что $z + \Delta z = 1{,}5z$ и Δz = 5 см.

Пример 9.2. Найти условие равенства нулю интенсивности n-го главного максимума для дифракции на решетке, представляющей периодическую последовательность N одинаковых параллельных щелей (период d, ширина одиночной щели b, $d > b$). Какой максимальный порядок главного максимума, который может наблюдаться при дифракции света с длиной волны λ = 500 нм на решетке с периодом d = 4 мкм?

Решение. Сначала рассмотрим дифракцию плоской световой волны на одиночной щели с шириной b при нормальном падении. В случае дифракции Фраунгофера формула Френеля-Кирхгофа существенно упрощается, и напряженность электрического поля дифрагировавшей волны можно определить при помощи соотношения

$$E(y) = \frac{E_0}{b}\int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(-\frac{ikyy'}{l}\right)dy',$$

где E_0 – амплитуда вектора напряженности электрического поля. Здесь ось y' направлена поперек щели и лежит в плоскости щели, а ось y параллельна оси y' и лежит в плоскости, на которой наблюдается дифракционная картина. Эта плоскость находится на расстоянии l от плоскости щели. Введем угол дифракции ϑ в соответствии с выражением $tg\vartheta = y/l$. При малых углах дифракции (на больших расстояниях) $\mathrm{tg}\vartheta \approx \sin\vartheta$, и напряженность поля в волне, дифрагирующей под углом ϑ, определяется выражением

$$E_\vartheta = \frac{E_0}{b}\int_{-b/2}^{b/2} \exp(-iky'\sin\vartheta)dy'.$$

Заметим, что величина $ky'\sin\vartheta$ определяет фазовый сдвиг волны, распространяющейся из точки щели с координатой y', относительно волны, распространяющейся под тем же углом из центра щели. Таким образом, выражение для поля можно рассматривать как результат суммирования вкладов всех точек щели с соответствующими фазовыми сдвигами.

В результате интегрирования получаем $E_\vartheta = E_0\mathrm{sinc}(\beta)$, где $\beta = \dfrac{kb\sin\vartheta}{2}$ и $\mathrm{sinc}(z) \equiv \sin(z)/z$. Таким образом, на экране, установленном за щелью, будет наблюдаться дифракционная картина в виде чередующихся светлых и темных полос. Угловое положение темных полос (нулевая интенсивность) будет определяться из условия $\beta = \dfrac{kb\sin\vartheta}{2} = \pi n \; (n = 1, 2, \ldots)$ или $\sin\vartheta = \lambda n / b$.

Перейдем к рассмотрению дифракционной решетки. Угловое распределение, создаваемое каждой щелью мы определили. Найдем угловое распределение, создаваемое всеми щелями, учитывая, что для выбранного направления дифракции под углом ϑ, фазовый сдвиг каждой щели относительно предыдущей определяется выражением $kd\sin\vartheta$. Для определения полного поля необходимо произвести суммирование сигналов всех щелей с учетом фазового сдвига. Ясно, что при таком суммировании величина $E_0\mathrm{sinc}(\beta)$ окажется вынесенной за скобки, так как все щели одинаковы. Учет же фазового сдвига приведет к вычислению суммы $\sum\limits_{n=0}^{N-1}\exp(-inkd\sin\vartheta)$. По формуле для геометрической прогрессии находим, что сумма равна

$$\frac{1-\exp(-iNkd\sin\vartheta)}{1-\exp(-ikd\sin\vartheta)} \quad \text{или} \quad \frac{\exp\left(\dfrac{-iNkd\sin\vartheta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{Nkd\sin\vartheta}{2}\right)}{\exp\left(\dfrac{-ikd\sin\vartheta}{2}\right)\sin\left(\dfrac{kd\sin\vartheta}{2}\right)}.$$

Таким образом, итоговое угловое распределение интенсивности пропорционально следующему произведению:

$$I(\vartheta) \sim \left(\frac{\sin\dfrac{kb\sin\vartheta}{2}}{\dfrac{kb\sin\vartheta}{2}}\right)^2 \frac{\sin^2\left(\dfrac{Nkd\sin\vartheta}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{kd\sin\vartheta}{2}\right)}.$$

Отношение квадратов синусов определяет главные максимумы при выполнении условия: $\dfrac{kd\sin\vartheta}{2} = \pi n, \; (n = 1, 2, \ldots)$ или $\sin\vartheta = \dfrac{\lambda}{d}n$. Видно, что условием равенства нулю интенсивности n-го максимума является совпадение этого максимума с нулем первого сомножителя, то есть условие $\lambda / b = n\lambda / d$ или $d = nb$. Предельный порядок дифракции определяется соотношением $1 = n_{max}\lambda / d$. После подстановки численных значений находим максимальный порядок дифракционного максимума $n_{\max} = \dfrac{d}{\lambda} = \dfrac{4\ \text{мкм}}{0.5\ \text{мкм}} = 8$.

Пример 9.3. Квадратное отверстие освещается параллельным пучком солнечного света, падающего нормально к плоскости отверстия. Найти размер изображения отверстия на экране, удаленном на $l = 50$ м от него. Сторона отверстия равна 0,2 см. За границу изображения на экране принять положение дифракционного максимума первого порядка для наиболее отклоняемых лучей (видимый спектр – 400–700 нм). Плоскость экрана параллельна плоскости отверстия.

Решение. По аналогии с решением Примера 9.2 напряженность электрического поля дифрагировавшей волны можно определить при помощи соотношения

$$E(x, y) = \frac{E_0}{b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(-\frac{ikxx'}{l} \right) dx' \int_{-b/2}^{b/2} \exp\left(-\frac{ikyy'}{l} \right) dy',$$

где E_0 – амплитуда вектора напряженности электрического поля. Здесь оси x' и y' лежат в плоскости отверстия, а оси x и y параллельны осям x' и y', соответственно, и лежат в плоскости наблюдения изображения. Эта плоскость находится на расстоянии l от плоскости отверстия. Введем углы дифракции ϑ_1 и ϑ_2 в соответствии с выражениями $tg\vartheta_1 = x / l$ и $tg\vartheta_2 = y / l$. При малых углах дифракции (на больших расстояниях) $\mathrm{tg}\vartheta \approx \sin\vartheta$, и напряженность поля в дифрагирующей волне определяется выражением

$$E = \frac{E_0}{b^2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp(-ikx' \sin\vartheta_1) dx' \int_{-b/2}^{b/2} \exp(-iky' \sin\vartheta_2) dy.$$

В результате интегрирования получаем $E = E_0 \mathrm{sinc}(\alpha)\mathrm{sinc}(\beta)$, где $\alpha = \dfrac{kb\sin\vartheta_1}{2}$ и $\beta = \dfrac{kb\sin\vartheta_2}{2}$. Наблюдаемая интенсивность пропорциональна E^2. Таким образом, на экране, установленном за щелью, будет наблюдаться дифракционная картина в виде системы темных и светлых квадратов.

Угловое положение дифракционных максимумов первого порядка определяется выражением $\dfrac{kb\sin\vartheta}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$ или $\sin\vartheta = 3\lambda / 2b$. На расстоянии l

от квадратного отверстия линейное расстояние между первым дифракционным максимумом и оптической осью системы составляет $D = l\mathrm{tg}\vartheta \approx l\sin\vartheta = 3\lambda l/2b$. Видно, что расстояние D увеличивается с ростом длины волны. Для численной оценки размера изображения используем максимальную длину волны видимого света λ = 700 нм. Таким образом, из-за дифракционной расходимости излучения на экране будет наблюдаться квадрат с длиной стороны $2D \approx 5$ см.

Пример 9.4. По прямой дороге едет машина с включенными фарами. Фары считать точечными источниками, находящимися на расстоянии l = 1,2 м друг от друга; диаметр зрачка наблюдателя D = 0,5 см; длину волны принять равной λ = 500 нм. На каком расстоянии L должна находиться машина от наблюдателя, чтобы он был уверен, что видит два источника света, а не один? Сравните полученное расстояние с расстоянием до линии горизонта.

Решение. Воспользуемся выражением (9.27), определяющим угол дифракционной расходимости при дифракции на круглом отверстии $\Delta\vartheta_{\text{дифр}} = 1{,}22\lambda/D$. Благодаря дифракции света на зрачке, на сетчатке глаза формируется изображение точечного источника, которое обладает конечным размером. Угловое расстояние между двумя источниками света (фарами) и их изображениями дается выражением $\Delta\vartheta \approx l/L$. Будем считать, что два источника различимы, если угловое расстояние между ними не меньше половины размера изображения одного точечного источника: $\Delta\vartheta \ge \Delta\vartheta_{\text{дифр}}/2$. Таким образом, для оценки расстояния получаем $L \le \dfrac{lD}{0.61\lambda} \approx 19{,}7$ км. Расстояние до линии горизонта для человека с ростом h можно оценить при помощи соотношения $L_{\text{гор}} \approx \sqrt{2Rh}$, где R – радиус Земли. Подставляя численные значения $R = 6{,}371\cdot 10^6$ м и h = 1,7 м, получаем $L_{\text{гор}} \approx 4{,}7$ км. На основании проведенных оценок можно утверждать, что на равнине человек с нормальным зрением всегда различит точечные источники, разнесенные на заданное расстояние.

Пример 9.5. Прозрачная периодическая структура изготовлена из материала с показателем преломления n. Ее толщина меняется по закону $d(x) = d_0 + d_1\sin(\kappa x)$. Структура освещается плоской монохроматической волной, падающей нормально на верхнюю плоскую поверхность. Определить вид фраунгоферовой дифракционной картины в воздухе при n = 1,5, λ = 500 нм, d_1 = 0,1 мкм, и $\kappa = 2{,}1 \cdot 10^4$ см$^{-1}$.

Решение. Воспользуемся выражением (9.22), определяющим угловое распределение света при дифракции Фраунгофера. В рассматриваемой одномерной задаче имеем

$$A(\vartheta) = const \int_{-\infty}^{+\infty} A(x') \exp(ikx' \sin\vartheta) dx'$$

Рассмотрим функцию $A(x')$, определяющую распределение поля в плоскости структуры. В рассматриваемой системе, падающая плоская волна проходит через периодическую структуру и приобретает фазовый набег, который для произвольной точки структуры с координатой x' можно представить в виде: $\frac{2\pi}{\lambda}(d_1 + d_1(n-1)\sin\kappa x')$, поэтому функция $A(x')$ приобретает вид

$$A(x') = a \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} d_1 (n-1) \sin\kappa x'\right),$$

где a – амплитуда падающей волны.

Таким образом, мы имеем дело с фазовой дифракционной решеткой. Воспользовавшись малостью параметра d_1 по сравнению с длиной волны, представим распределение поля за структурой в виде:

$$A(x') = a \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} d_1 (n-1) \sin\kappa x'\right) \approx a\left(1 + i\left(\frac{2\pi}{\lambda} d_1 (n-1) \sin\kappa x'\right)\right).$$

Выражение, определяющее угловое распределение дифрагировавшего излучения принимает вид

$$A(\vartheta) \approx a \int_{-\infty}^{+\infty} \left(1 + i \frac{2\pi}{\lambda} d_1 (n-1) \sin\kappa x'\right) \exp i(kx' \sin\vartheta) dx'.$$

Размер решетки в задаче не определен, поэтому в интеграле сохраняются бесконечные пределы. С физической точки зрения это означает, что размер решетки много больше периода структуры $L = 2\pi/\kappa \approx 3$ мкм. Используя выражение $\sin\alpha = \left(e^{ia} - e^{-i\alpha}\right)/2i$, преобразуем угловое распределение к виду:

$$A(\vartheta) \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikx' \sin\vartheta) dx' + C \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ix'(k \sin\vartheta + \kappa)) dx' - C \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ix'(k \sin\vartheta - \kappa)) dx',$$

где $C = \dfrac{\pi}{\lambda} d_1 (n-1)$.

В полученном выражении каждое из трех слагаемых является интегральным представлением δ-функции. Таким образом, в результирующей дифракционной картине будут наблюдаться три бесконечно узких максимума при углах, определяемых условиями:

$$\sin\vartheta_0 = 0, \quad \sin\vartheta_{-1} = -\kappa/k = -\lambda/L \ \text{ и } \ \sin\vartheta_{+1} = \kappa/k = \lambda/L .$$

Подставляя численные значения, находим, что помимо нулевого максимума (свет распространяется без изменения первоначального направления) будут наблюдаться дифракционные максимумы под углами $\vartheta_{\pm 1} \approx \pm 9{,}6^{\circ}$. Заметим, что относительная интенсивность этих максимумов пропорциональна C^2 и возрастает при увеличении как показателя преломления материала структуры, так и глубины модуляции профиля. Бесконечно узкие дифракционные максимумы стали следствием дифракции на решетке с бесконечным линейным размером. Очевидно, что учет конечности размеров приведет к конечной ширине дифракционных максимумов.

Задания для самостоятельной работы[2]

9.6. (*2*) Параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 500$ нм) интенсивности I_0 падает на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметра 2 мм.

1) Найти координаты z_1, z_2, …, z_n точек P_1, P_2, …, P_n, лежащих на оси отверстия, для которых в пределах отверстия укладывается 1, 2, …, n зон Френеля.

2) Построить приближенно график зависимости интенсивности света на оси отверстия от расстояния до точки наблюдения.

3) Определить, на какое расстояние надо сместиться из точки P_1, удаляясь от экрана, чтобы интенсивность света в новой точке наблюдения стала в два раза меньше, чем в точке P_1.

Литература
Г.С. Ландсберг. Оптика. М.: Наука, 1976, гл. 8, §§ 33-35.
Л.Н. Капцов. Физика элементов ЭВМ, М.: изд-во МГУ, 1983, гл. 3, § 22.

[2] В скобках указана степень сложности задания, которая оценивается в баллах от 1 (наименьшая сложность) до 3 (наибольшая сложность).

9.7. (*2*) На линзу с фокусным расстоянием $f = 1$ м падает параллельный пучок света ($\lambda = 530$ нм). Непосредственно за линзой установлена диафрагма. Точка наблюдения P находится на оси, на которой лежат центры линзы и диафрагмы; расстояние от точки P до линзы – 0,5 м. При каком радиусе диафрагмы в точке наблюдения будет максимум интенсивности?
Указание: При расчете радиусов зон Френеля учесть форму фронта световой волны, прошедшей через линзу.

9.8. (*2*) Зонная пластинка состоит из трех наложенных друг на друга соосных цилиндров, изготовленных из стекла с показателем преломления n и имеющих одинаковые высоты h и радиусы $r_1 = 2$ мм, $r_2 = 4$ мм и $r_3 = 6$ мм. Определить максимальное фокусное расстояние $f_{\max}$ пластинки для света с длиной волны $\lambda = 500$ нм. Указать, при какой толщине h интенсивность в фокусе будет наибольшей. Какова величина интенсивности $I_{\max}$ в этом случае, если интенсивность падающего света равна I_0?
Литература
Г.С. Ландсберг. Оптика. М.: Наука, 1976, гл. 8, §§ 34, 35.

9.9. (*3*) Прозрачная периодическая структура со скачкообразным изменением толщины, представляющая собой чередование плоско-параллельных пластинок, различающихся по толщине на h и имеющих одинаковую ширину b, освещается плоской монохроматической волной, падающей нормально на плоскую верхнюю поверхность структуры. При заданном показателе преломления n подобрать h таким образом, чтобы главные дифракционные максимумы первого порядка при дифракции Фраунгофера имели наибольшую интенсивность. Какова при этом интенсивность нулевого главного максимума? Найти максимальный порядок спектра в воздухе при $n = 1{,}5$, $h = 0{,}1$ мкм, $\lambda = 500$ нм и $b = 2\cdot 10^{-4}$ см.
Литература
Г.С. Ландсберг. Оптика. М.: Наука, 1976, гл. 9, § 46.
Ф. Крауфорд. Волны. М.: Наука, 1974, § 9.6.
Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Оптика. М.: Наука, 1980, §§ 52, 53.

9.10. (*3*) В плоской прозрачной кювете с водой распространяется плоская ультразвуковая волна частоты $\nu = 10^8$ Гц и интенсивности $I = 10^{-4}$ Вт/см^2. Перпендикулярно направлению распространения волны падает монохроматический свет длины волны $\lambda = 500$ нм. Найти угловое

положение и относительную интенсивность дифракционных максимумов, если толщина кюветы h = 10 мм.
Указание. При решении задачи воспользоваться краткими теоретическими сведениями из *§1. Бегущие волны*. Считать, что изменение показателя преломления пропорционально изменению плотности, связанному с прохождением акустической волны.

Литература

А.Н. Матвеев. Оптика. § 33.

Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Оптика. М.: Наука, 1980, § 52.

9.11. (*2*) Коэффициент пропускания амплитудной решетки $T(x)$ изменяется по гармоническому закону $T(x) = a + b\cos px$. Найти угловое распределение интенсивности и относительную величину максимумов при дифракции света на решетке. Длина волны света λ = 500 нм, $a = b = 0.5$, $p = 2\pi\cdot 10^2$ мм$^{-1}$.

Литература

Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Оптика. М.: Наука, 1980, §§ 52, 53.

9.12. (*1*) Определить размер светового пятна на Луне от лазерного источника плоской волны с диаметром выходного окна D = 5 см, если расстояние до Луны 384000 км. Длина волны излучения λ = 600 нм. Какова плотность мощности излучения S на Луне, если мощность источника N = 10 Вт? Ослаблением в атмосфере пренебречь. Сколько зон Френеля укладывается в выходном окне? При каком диаметре выходного окна с Луны открывается одна зона Френеля? Определить для этого случая размеры пятна на Луне.

9.13. (*1*) Линза с фокусным расстоянием f = 2,5 м фокусирует лазерный пучок диаметром D . Длина волны λ = 630 нм. Учитывая дифракционную расходимость, оценить, во сколько раз интенсивность в фокусе больше интенсивности падающего излучения. Рассмотреть и сравнить случаи D = 2 мм и 2 см.

9.14. (3) Рассчитать амплитуду светового поля при дифракции пучка с гауссовым распределением амплитуды светового поля и плоским фазовым фронтом при $z = 0$:

$$E(x, y, z = 0, t) = E_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2a_0^2}\right)\exp\left(i(\omega t - kz)\right), \quad k = 2\pi/\lambda.$$

Рассмотреть ближнюю зону ($z \geq ka_0^2$) и дифракцию Фраунгофера ($z >> ka_0^2$). Построить распределение интенсивности $I(r)$ ($r^2 = x^2 + y^2$ в сечении пучка) при $z = 0$ и $z = ka_0^2$. Построить график зависимости радиуса гауссова пучка a от расстояния z, если $a(0) = a_0$.

Литература

Г.С. Ландсберг. Оптика. М.: Наука, 1976, гл. 9, §§ 43.

9.15. (*2*) Отражательная дифракционная решетка имеет пилообразный профиль с периодом $d = 0{,}1$ мм. Повторяющимся элементом профиля является прямоугольный треугольник, катет-основание которого равен периоду решетки d, а острый угол, прилегающий к основанию равен $\beta = 0{,}05$ рад. Нормально к плоскости основания решетки падает плоская волна ($\lambda = 500$ нм). Найти угол ϑ между падающей и отраженной волной, при котором интенсивность отраженного света максимальна (угол блеска). Определить порядок дифракционного максимума n, соответствующего этому углу.

9.16. (*2*) На щель шириной a нормально падает плоская волна с длиной волны λ. Щель закрыта двумя стеклянными пластинками с одинаковыми ширинами $a/2$, толщинами h и показателями преломления n. Коэффициенты пропускания пластинок T_1 и T_2. Найти распределение интенсивности во фраунгоферовой дифракционной картине. При каком условии в центре картины получится темная полоса?

Литература

Г.С. Ландсберг. Оптика. М.: Наука, 1976, гл. 9, §§ 39, 40.

9.17. (*2*) На пилообразную решетку, изготовленную из стекла с показателем преломления n, нормально падает свет с длиной волны λ. Число "зубьев" решетки – N. Профиль каждого "зуба" – прямоугольный треугольник с катетами a и h. Катет "зуба" a является периодом решетки. Катет h – высота "зуба", при этом $a >> h$. Найти угловое распределение интенсивности для дифракционной картины, наблюдаемой за решеткой.

Литература

Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Оптика. М.: Наука, 1980, §§ 52, 53.

9.18. (*3*) Две плоские монохроматические когерентные волны равной амплитуды A падают на синусоидальную решетку с амплитудным коэффициентом пропускания $T(x) = 1 + 0{,}5\sin px$. Углы падения волн $\pm 0{,}06$ рад. В точке $x = 0$ эти волны создают синфазные колебания. Период решетки $d = 10^{-3}$ см, длина волны $\lambda = 600$ нм. Определить угловое распределение интенсивности суммарной волны за решеткой.

Литература

Д.В. Сивухин. Общий курс физики. Оптика. М.: Наука, 1980, §§ 52, 53.

9.19. (*1*) При аэрофотосъемке местности используется объектив с фокусным расстоянием $f = 10$ см и диаметром $D = 5$ см. Съемка производится на фотопленку, имеющую разрешающую способность $R = 100$ мм$^{-1}$. Определить наименьший размер объекта, который может быть разрешен на фотографии, если съемка производится с высоты $h = 10$ км.

9.20. (*1*) Излучение непрерывного лазера с длиной волны $\lambda = 630$ нм и мощностью $P = 10$ мВт направляется на спутник с помощью телескопа, объектив которого имеет диаметр $D = 30$ см. Свет, отраженный спутником, улавливается другим таким же телескопом и фокусируется на фотоприемник с пороговой чувствительностью $P_{пор} = 10^{-14}$ Вт. Оценить максимальное расстояние до спутника, на котором отраженный сигнал еще может быть обнаружен. Поверхность спутника равномерно рассеивает 90% падающего светового потока в полусферу. Диаметр спутника $d = 20$ см.

Литература

Г.С. Ландсберг, Оптика. М.: Наука, 1976, §§ 42, 96.

9.21. (*2*) Рассмотреть дифракцию Фраунгофера на круглом отверстии диаметром D. Рассчитать и представить графически распределение интенсивности $I(r)$ в плоскости, находящейся на расстоянии z от отверстия ($z >> D^2/\lambda$). Найти относительную величину максимумов в дифракционной картине и радиусы первых двух темных колец. Оценить угловую расходимость излучения.

Литература

А.Н. Матвеев, Оптика. М.: Высшая школа, 1985, § 33.

Дж. Гудмен, Введение в Фурье-оптику, М.: Мир, 1970.

9.22. (*3*) Рассмотреть дифракцию Фраунгофера на двух одинаковых параллельных щелях шириной b и длиной l. Расстояние между ближними краями щелей $(d - b)$. Рассчитать в дальней зоне двумерное распределение интенсивности в плоскости, параллельной экрану с щелями. Представить это распределение графически. Определить угловые размеры двух-трех центральных максимумов.

9.23. (*3*) Рассмотреть дифракцию Фраунгофера на квадратном отверстии со стороной L, в центре которого находится квадратный непрозрачный экран со стороной l ($l < L$). Рассчитать в дальней зоне двумерное распределение интенсивности в плоскости, параллельной экрану. Представить это распределение графически. Определить угловые размеры центрального максимума.

9.24 (*3*) Показать, что собирающая линза выполняет двумерное преобразование Фурье на следующем примере. Плоский предмет с амплитудным коэффициентом пропускания $T(x',y')$ находится на расстоянии d от фокальной плоскости линзы с диаметром D и фокусным расстоянием f ($d < f$). Линза освещается нормально падающей плоской монохроматической световой волной. Поперечный размер предмета удовлетворяет условию $a < Dd/f$.

<u>*Литература*</u>

Дж. Гудмен. Введение в Фурье-оптику, М.: Мир, 1970.

9.25. (*3*) Показать, что собирающая линза выполняет двумерное преобразование Фурье на следующем примере. Плоский предмет с амплитудным коэффициентом пропускания $T(x',y')$ находится на расстоянии d перед линзой с фокусным расстоянием f. Предмет равномерно освещен нормально падающей плоской монохроматической световой волной. Найти комплексную амплитуду поля и распределение интенсивности в фокальной плоскости линзы, используя приближение Френеля в теории дифракции. Принять, что поперечный размер предмета много меньше диаметра линзы. Рассмотреть случай $d = f$.

<u>*Литература*</u>

Дж. Гудмен. Введение в Фурье-оптику, М.: Мир, 1970.

9.26. (*3*) Плоская гармоническая волна с длиной волны λ падает нормально на решетку из щелей шириной b. Период решетки равен a. Получить и построить изображение решетки на расстоянии $z = 0{,}5 z_T$ и $1{,}5 z_T$, где

$z_{\text{T}} = 2a^2/\lambda$ – расстояние Тальбо. Для сравнения наложить полученные изображения на изображение решетки.

9.27. (*З*) Плоская гармоническая волна с длиной волны λ падает нормально на экран с периодически расположенными отверстиями прямоугольной формы. Период решетки по оси *OX* равен a_x, по оси *OY* – a_y, размеры прямоугольных отверстий равны b_x и b_y, соответственно. Найти условие на параметры решетки, при котором существует эффект Тальбо, то есть возможно дифракционное самовоспроизведение двумерного изображения периодически расположенных отверстий. Определить расстояние Тальбо z_{T} и расстояния кратных эффектов Тальбо $z_{\text{T}}^{(s)}$, на которых повторяется самовоспроизведение изображений.

9.28. (*З*) Плоская гармоническая волна с длиной волны λ падает нормально на решетку с периодом a. Ширина щелей $b = a/2$. Получить и построить изображение решетки на расстоянии $z = 0{,}25z_{\text{T}}$; $0{,}5z_{\text{T}}$; $0{,}75z_{\text{T}}$ и z_{T}, где $z_{\text{T}} = 2a^2/\lambda$ – расстояние Тальбо. Для сравнения наложить полученные изображения на изображение решетки.

Справочные данные

Физические постоянные

скорость света в вакууме, $c_0 = 2{,}998 \cdot 10^8$ м/с

элементарный заряд (заряд электрона), $e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ Кл

масса покоя электрона, $m = 9{,}110 \cdot 10^{-31}$ кг

атомная единица массы, 1 а.е.м. $= 1{,}661 \cdot 10^{-27}$ кг

электрическая постоянная, $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ (А·с)/(В·м)

магнитная постоянная, $\mu_0 = 1{,}257 \cdot 10^{-6}$ (В·с)/(А·м)

постоянная (число) Авогадро, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

постоянная Больцмана, $k = 1{,}381 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

универсальная газовая постоянная, $R = 8{,}314$ Дж/(моль·К)

постоянная Планка, $h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с

скорость звука в воздухе при нормальных условиях, $c_{\text{возд}}$ = 331,5 м/с
скорость звука в воде при 25°C, $c_{\text{вода}}$ = 1497 м/с
средний радиус Земли, R = 6371 км
показатели преломления n (для излучения видимого диапазона):
1,0003 (воздух); 1,33 (вода); 1,5–1,7 (стекла различных марок); 2,42 (алмаз)

Приставки к единицам измерения

10^{-1} деци (д, d)	10^{1} дека (да, da)
10^{-2} санти (с, s)	10^{2} гекто (г, h)
10^{-3} милли (м, m)	10^{3} кило (к, k)
10^{-6} микро (мк, μ)	10^{6} мега (М, M)
10^{-9} нано (н, n)	10^{9} гига (Г, G)
10^{-12} пико (п, p)	10^{12} тера (Т, T)
10^{-15} фемто (ф, f)	10^{15} пета (П, P)
10^{-18} атто (а, a)	10^{18} экса (Э, E)

Векторные величины обозначены жирным шрифтом.